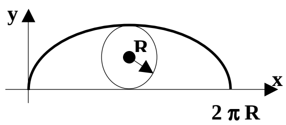
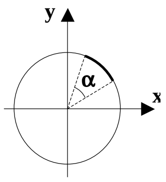
TEMA 13: INTEGRALES CURVILÍNEAS

EJERCICIOS



1. Calcula la longitud de un arco de la cicloide:

$$C:\begin{cases} x = R\cdot(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R\cdot(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$



2. Calcula la longitud de un arco de circunferencia de radio R y amplitud α

3. Calcula la longitud del arco de parábola $y = x^2;\ 0 \le x \le 1$

4. Calcula la longitud del arco de la curva: $y = \mathrm{Ln}\ (\cos x)\ ;\ 0 \le x \le \pi / 4$.

5. Calcula: $I = \int_C y^2\, ds$ siendo C el arco de la curva $y = e^x;\ 0 \le x \le 1$.

6. Calcula: $I = \int_C 2x\, ds$ siendo C el arco de la curva $y = x^2;\ 0 \le x \le 1$.

7. Calcula: $I = \int_C (x^2 - y + 3z)\, ds$

Siendo C la curva poligonal que une los puntos: (0, 0, 0) , (1, 2, 0), (1, 2, 1), (0, 0, 0).

8. Calcula: $I = \int_C x\, ds$ siendo C = C1 + C2 donde C1 es el segmento recto que une el origen con el punto (1, 1) y C2 el arco de la parábola $y = x^2$ que une el punto (1, 1) con el origen.

9. Calcula: $I = \int_C \left(xy - x^2 + 2z^2\right) ds$ siendo la curva C:

$$\overrightarrow{r(t)} = \cos t \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} t \cdot \vec{j} + 3z \cdot \vec{k} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

10. Calcula: $I = \int_C y\, dx + x\, dy + xyz\, dz$ siendo la curva C: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

11. Calcula: $I = \int_C x\, dx + y\, dy + z\, dz$ Siendo la curva C : $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = 2y; \quad z \ge 0 \end{cases}$

12.

12.a. Demuestra que $\vec{F}(x,y) = \left(x - \dfrac{y}{x^2+y^2} \right) \vec{i} + \left(y + \dfrac{x}{x^2+y^2} \right) \vec{j}$ es conservativo.

12.b. Halla su función potencial.

12.c. Calcula $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es la circunferencia unidad.

13.

13.a. Sin aplicar el teorema de Green, calcula: $I = \dfrac{1}{3} \cdot \int_C -y^3 \, dx + x^3 \, dy$

Donde C es el triángulo de vértices: A(-2, 0), B(1, -3) y C(1, 3), recorrido en sentido positivo.

13.b. Comprueba el resultado obtenido mediante el teorema de Green.

14. Calcula $I = \int_C z^2 \, dx + x^2 \, dy + y^2 \, dz$

Donde C es el triángulo esférico determinado por los puntos: A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a) de la esfera centrada en el origen y de radio "a".

15. Calcula $I = \int_C x\,y \, dx - yz \, dy + z^2 \, dz$ donde C: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad z \geq 0 \end{cases}$

16. Comprueba que se verifica el teorema de Green para el campo: $\vec{F}(x,y) = (xy - x^2)\,\vec{i} + (x+y)\,\vec{j}$ en el recinto R.

$$R : \left\{ (x,y) / \ x^3 \leq y \leq x \ ; \quad 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

17.

17.a. Sin aplicar el teorema de Green, calcula $I = \int_C y \, dx + 2x \, dy$ donde C es la curva frontera de la región plana determinada por los puntos que verifican al menos una de las dos desigualdades siguientes: $\begin{matrix} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \end{matrix}$

17.b. Comprueba el resultado obtenido mediante el teorema de Green.

18.

18.a. Sea R un recinto plano cuya frontera es una curva regular cerrada C, recorrida en sentido positivo (antihorario). Demuestra, mediante la aplicación del teorema de Green, que el área del recinto R coincide con el valor de siguiente integral: $I = \dfrac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy$

18.b. Como aplicación, halla la expresión para el cálculo del área de un recinto poligonal cerrado de n vértices (xi, yi).

19. Sea el campo vectorial: $\vec{F}(x,y) = \frac{Ln(x)+Ln(y)}{x} \cdot \vec{i} + \frac{Ln(x)+Ln(y)}{y} \cdot \vec{j}$ definido en el dominio: $H = \{\ (x,y)/\,x > 0,\ y > 0\ \}$.

19.a. Calcula $\int_C \vec{F}(x,y)\,ds$ donde C: $\{\ (x,y)/\,x \cdot y = a; \quad p \le x \le q\ \} \quad (a > 0)$

19.b. Demuestra que $\int_C \vec{F}(x,y)\,ds = \frac{1}{2}\,Ln(ab)\,Ln\left(\frac{b}{a}\right)$ siendo C una curva cualquiera contenida en H y que une un punto cualquiera de la hipérbola x · y = a con otro punto cualquiera de la hipérbola x · y = b

20. Sea el campo vectorial: $\vec{F} = (x,\ y,\ x)$.

Calcula la integral de línea de dicho campo sobre la curva C, intersección de las superficies: $z = (x+1)^2 + y^2 \ ; \quad x^2 + y^2 = 1$

21. Utiliza el teorema de Green para calcular el valor de la siguiente integral doble: $I = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\ dy \quad R = \left\{\ (x,y)/\ x^2 + y^2 \le 4\ ; \quad x \ge 1\ ; \quad y \ge 1\ \right\}$

22. Comprueba que se verifica el teorema de Green para:

$$I = \iint_R \left(x^2 - y^2\right) dx\ dy \qquad R = \left\{\ (x,y)/\ \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} \le 1\ \right\}$$