TEMA 8: FUNCIONES DE DOS VARIABLES

EJERCICIOS

1 Calcula los siguientes límites dobles:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^3+(y+1)^3}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{L(1+x^2+y^2)}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{y} - y^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right]$

2 Calcula las funciones derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \cdot \operatorname{sen}(xy)$

b) $f(x,y) = x + y \cdot e^{\cos\left(x^2+y^2\right)}$

3 Calcula la funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4 Sea $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ Halla el plano tangente así como la recta normal en el punto $(1, \pi, 0)$

5 Demuestra que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ en los casos siguientes:

1) $z = \cos x \cdot \operatorname{sen} y + \dfrac{x}{y}$ 2) $z = e^{x} \cdot \cos(y - x)$

6 Sea la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + xy\,e^{x/y}$

a) Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 1)$.

b) ¿Es diferenciable en el punto (0, 1)? ¿Porqué?.

c) Calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto según el vector: $\vec{h} = \vec{j}$.

7 Sea la función $f(x, y) = x^2 \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y} e^{x^2 y}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad en el dominio.

b) ¿Existe el vector gradiente en el punto (0, 1)? ¿Porqué?. Hallalo en caso afirmativo.

c) Expresa la ecuación del plano tangente.

8 Sabiendo que la función $f(x,y) = x^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) - xy \cos\left(\dfrac{\pi x}{x^2 + y^2}\right)$ es diferenciable en el punto (0, 1), calcula el mayor valor de las derivadas direccionales en dicho punto.

9 Sabiendo que la función f(x, y) es diferenciable en el punto: $(1, 0)$, calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto en la dirección y sentido del vector $\vec{h} = \vec{i} - \vec{j}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2 + y^4} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10 Halla los extremos relativos de: $f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$

11 Sea la función: $f(x,y) = x^2 e^x \dfrac{1}{x + y}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad.

b) ¿Es diferenciable en el punto (1, 2)? ¿Porqué?.

c) Calcula el valor máximo de las derivadas direccionales en el punto (1, 2). Indica un vector en cuya dirección y sentido se alcance dicho valor.

12 Halla los extremos relativos de la función: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

13 Sabiendo que la función f(x, y) es diferenciable en el punto: $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$, calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto en la dirección y sentido del vector $\vec{h} = \vec{i} - \vec{j}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

14 Sea la función: $f(x,y) = e^{x^2 y} \cos(xy) + \frac{x}{x^2 + y^2}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad.

b) ¿Es diferenciable en el punto (0, 0)? ¿Porqué?. ¿ Y en el punto (1, 0)?

c) Calcula el valor máximo de las derivadas direccionales en el punto (1, 0).

d) Calcula el valor de la derivada direccional en el punto (1, 0), en la dirección del vector: $4\vec{i} - 3\vec{j}$.

15 Halla los extremos relativos de la función: $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

16 Halla “a” y “b” para que la derivada direccional máxima de la función: $f(x,y) = e^{ax+by} \cos(x+y)$ en el punto (0,0) valga $3\sqrt{2}$ y se alcance en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

17 Sea f(x, y) una función diferenciable en $\Re^2$.

Sean los puntos: A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7) y D(6, 15).

La derivada direccional de f(x, y) en el punto A, en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ vale 3 y en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$ vale 26.

a) Calcula el valor de la derivada direccional de f(x, y) en el punto A, en la dirección del vector: $\overrightarrow{AD}$.

b) Halla un punto E(a, b), tal que el valor de la derivada direccional de f(x, y) en el punto A, en la dirección del vector: $\overrightarrow{AE}$, sea máxima.

18 Dada la función $z = L\,(1 + x^2 + y^2) + e^{x^2 y} + \operatorname{sen}(2x - 3y)$

a) Demuestra que la función es diferenciable en el punto (0, 0) y calcula el vector gradiente en dicho punto.

b) Calcula el valor de la derivada direccional en el punto (0, 0) y en la dirección del vector (1, 1).

c) Indica una dirección, a partir del punto (0, 0), en la que el crecimiento de la función sea nulo

19 Calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$