Ejercicio 1. (2,5 puntos)

Halla el dominio de la siguiente función: $\mathbf{y = arc\,sen\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)}$

$$y = arc\,sen\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \quad \Rightarrow \quad -1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$$

- $-1 \le \dfrac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad 0 \le 1 + \dfrac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$ por lo que la desigualdad se cumple siempre, sea cual sea el valor de x.

$$\Rightarrow \quad x \in \Re$$

- $\dfrac{2x}{x^2+1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x^2+1} - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+1} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \ge 0$ por lo que la desigualdad se cumple siempre, sea cual sea el valor de x.

$$\Rightarrow \quad x \in \Re$$

Luego ambas inecuaciones se verifican para todo valor de x.

$$\text{Dom}(f) = \Re$$

<u>Ejercicio 2</u>. (2,5 puntos)

Calcula la ecuación de la parábola que pasa por el punto (2, 1) y cuya recta tangente en el punto (0, 1) tiene por ecuación: $y=-x+1$

Puesto que los dos puntos por los que pasa la parábola tienen el mismo valor de la ordenada, dicha parábola debe ser abierta hacia arriba o abajo debido a que su eje deber ser vertical, es decir, del tipo: $y=ax^2+bx+c$

(De acuerdo con el dato sobre la tangente se puede razonar que es abierta hacia arriba ¿Cómo?)

La parábola pasa por el punto (2, 1) $\Rightarrow \quad 1=4a+2b+c$

La parábola pasa por el punto (0, 1) $\Rightarrow \quad 1=c$

La pendiente de la recta tangente en un punto coincide con el valor de la derivada en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pendiente de la recta tangente en } (0,1): -1 \\ \text{Derivada en el punto } (0,1): y'=2ax+b \quad \Rightarrow \quad y'(0)=b\end{array}\right\} \Rightarrow \quad b=-1$$

$$\text{Como: } \left.\begin{array}{l}1=4a+2b+c \\ b=-1 \\ c=1\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=4a-2+1 \quad \Rightarrow a=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x^2-x+1$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2$$

Parábola cuyo vértice es el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y está abierta hacia arriba.

<u>OTRO MÉTODO:</u>

Si la ecuación elegida es la general: $Ax^2+Cx+Dy+E=0$ se debe tener en cuenta que el coeficiente $A\neq 0$ por lo que dividiendo toda la ecuación por A, se tiene: $x^2+mx+ny+p=0$

La parábola pasa por el punto (2, 1) $\Rightarrow \quad 4+2m+n+p=0$

La parábola pasa por el punto (0, 1) $\Rightarrow \quad n+p=0$

$$\left\{\begin{array}{l}4+2m+n+p=0 \\ n+p=0\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}4+2m=0 \\ n+p=0\end{array}\right\}$$

Falta la ecuación correspondiente a la recta tangente. La pendiente de la recta tangente en un punto coincide con el valor de la derivada en dicho punto.

$$\begin{array}{l}\text{Pendiente de la recta tangente en } (0,1): -1 \\ \text{Derivando}: 2x+m+n\cdot y'=0 \\ \text{En el punto } (0,1): m-n=0\end{array}$$

$$\text{De manera que el sistema queda así: } \left\{\begin{array}{l}4+2m=0 \\ n+p=0 \\ m-n=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad m=-2; \quad n=-2; \quad p=2$$

Y la parábola buscada es: $x^2-2x-2y+2=0$

Ejercicio 3. **(2,5 puntos)**

Calcula el ángulo con el que se cruzan las gráficas de las funciones:
f(x) = tg x   g(x) = cos x   en el intervalo $[0, \pi]$

- Punto de corte:

$$\left.\begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = \cos x \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solución correspondiente al signo menos no es válida ya que es un valor menor que -1.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0,6662$$

$$\Rightarrow \quad y = \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Luego el punto de corte es: $P\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$

- Pendiente de la recta tangente en dicho punto: $m = y'(P)$

En la curva $y = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad m_1 = y'(P) = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}$

En la curva $y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad m_2 = y'(P) = -\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Como las pendientes son reciprocas y opuestas ambas rectas tangentes son ortogonales, es decir, forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$

Lo comprobamos:

- Ángulo de corte:

Efectivamente: $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{2}{-1+\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 + \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\sqrt{5}}{1-1}\right| = \infty$

$$\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$$

OTRO MÉTODO:

Un vector director de la recta cuya pendiente es "m" es: $(1, m)$

- Vectores directores de las rectas tangentes:

a la curva $y = \operatorname{tg} x$: $\vec{u} = (1, m_1) = \left(1, \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)$

a la curva $y = \cos x$: $\vec{v} = (1, m_2) = \left(1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

- Ángulo de corte:

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} \right| = \left| \frac{\left(1, \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)\cdot\left(1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \right| = \left| \frac{1-1}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$$

Ejercicio 4. **(2,5 puntos)**

Sea: $f(x) = Ln\left(1 - e^{x^2+x-2}\right)$

a) Halla Dom (f).

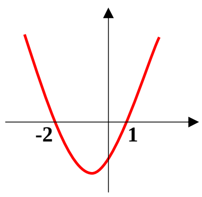
b) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

c) Halla los extremos relativos.

a) La función logaritmo está definida sólo para valores positivos del antilogaritmo. Por lo tanto, f(x) solamente está definida para aquellos valores de "x" en los que se cumpla que:

$$1 - e^{x^2+x-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x^2+x-2} < 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0$$

$y = x^2 + x - 2$ representa gráficamente una parábola abierta hacia arriba, y que corta al eje en:



$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Esto implica que la gráfica de dicha parábola sea algo parecido a la figura adjunta:

En la figura se aprecia claramente, que la parábola toma valores negativos para los valores de x comprendidos entre –2 y 1.

Así pues, nuestra función está definida en el intervalo (- 2 , 1)

$$\Rightarrow \quad Dom\left(f\right) = \left(-2, 1\right)$$

b) Puesto que la función es composición de funciones claramente continuas en todo $\Re$, se concluye que es continua en todo su dominio

$$\Rightarrow \quad \text{f(x) es continua en (-2, 1)}$$

Análogamente, puesto que la función es composición de funciones claramente derivables en todo $\Re$, se concluye que es derivable en todo su dominio

$$\Rightarrow \quad \text{f(x) es derivable en (-2, 1)}$$

Su función derivada es: $f'(x) = -\dfrac{(2x+1)\cdot e^{x^2+x-2}}{1 - e^{x^2+x-2}} \quad \forall x \in \left(-2, 1\right)$

c) Puesto que f(x) es derivable en todo su dominio, los únicos puntos críticos de la misma serán aquellos en los que dicha derivada se anula:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

El análisis de dicho punto crítico se puede hacer mediante la derivada segunda o mediante la derivada primera. Optaremos por este último ya que conocemos su expresión, y el cálculo de la segunda derivada no es muy cómodo:

Tengamos en cuenta que por todo lo dicho anteriormente:

En el numerador: $e^{x^2+x-2} > 0$ y en el denominador: $1 - e^{x^2+x-2} > 0$

Luego:

$$\text{Si } x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad 2x+1<0 \Rightarrow \quad f'(x)>0$$

$$\text{Si } x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad 2x+1>0 \Rightarrow \quad f'(x)<0$$

Resulta que f(x) es creciente a la izquierda del punto crítico y decreciente a su derecha, por lo que alcanza en él un máximo relativo