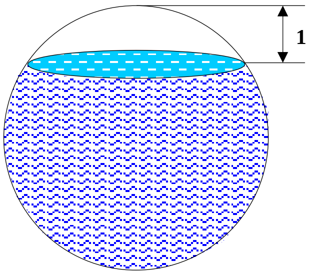
GAR: MATEMÁTICA APLICADA

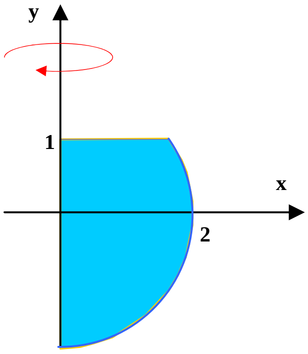
Final (2ª parte) **13 de junio de 2011** **Curso 2010/2011**

Duración: 2 horas

Ejercicio 1.

Un depósito de agua con forma esférica de radio 2 metros, está lleno hasta una altura de tres metros. Calcula el volumen de agua que almacena.





El volumen se obtiene por giro, del recinto representado en la figura de la derecha, alrededor del eje OY.

Dicho recinto es parte de un círculo centrado en el origen y de radio 2. Como sabemos la ecuación de la circunferencia correspondiente es: $x^2 + y^2 = 2^2$

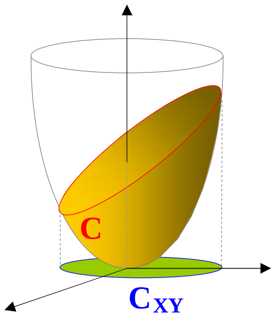
Eje de referencia OY: $\left[-2, 1\right]$, $\quad x = 0$, $\quad x = \sqrt{4 - y^2}$

Se generan discos:

$$V = \int_{-2}^{1} \pi \cdot \left(\sqrt{4 - y^2} - 0 \right)^2 dy = \pi \cdot \int_{-2}^{1} \left(4 - y^2 \right) dy = \pi \cdot \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \pi \cdot \left[\left(4 - \frac{1}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right] = 9\pi \quad m^3$$

Ejercicio 2.

Calcula el volumen del sólido Q: $\left\{ (x, y, z) \in \Re^3 \;/\; x^2 + y^2 \le z \le 2 + 2x + 2y \right\}$



La superficie z = 2 + 2x + 2y es un plano. La otra superficie, $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide con vértice en el origen y abierto hacia arriba. Los recintos espaciales determinados por las dos inecuaciones presentes en la definición de Q confieren a éste un aspecto similar al de la figura. Sabemos que:

$$V_Q = \iint_R \left[(2 + 2x + 2y) - \left(x^2 + y^2 \right) \right] dx\, dy$$

ya que Q está limitado superiormente por el plano e inferiormente por el paraboloide. Para resolver esa integral necesitamos conocer R, es decir, la proyección de dicho sólido sobre el plano XY.

Intersección de ambas superficies: $C = \left\{ \begin{array}{l} z = 2 + 2x + 2y \\ z = x^2 + y^2 \end{array} \right\}$

Eliminando la variable "z" se obtiene la proyección de C sobre el plano XY:

$$\Rightarrow \quad 2 + 2x + 2y = x^2 + y^2 \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 : C_{XY}$$

Por lo tanto, el recinto R de integración y proyección de Q sobre XY es el recinto plano limitado por C_{XY}, es decir, un circulo de centro el punto (1, 1) y de radio igual a 2. Por ello nos interesaría pasar a polares.

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{Cambio} : x = 1 + \rho \cos\theta \\ y = 1 + \rho\, \text{sen}\, \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho$$

$$V_Q = \iint_R \left[(2 + 2x + 2y) - \left(x^2 + y^2 \right) \right] dx\, dy = \iint_M \left(4 - \rho^2 \right) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=2} \left(4\rho - \rho^3 \right) d\rho \right] d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[4\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 d\theta =$$

$$= 4 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = 8\pi$$

$$\Rightarrow \quad V_Q = 8\pi \quad u^3$$

Ejercicio 3.

Calcula: $\mathbf{I(x) = \int (x+1)\ arc\,sen\,(2x-1)\ dx}$

$$\left\{\begin{array}{lll} u = arc\,sen\,(2x-1) & \Rightarrow & du = \dfrac{2}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx \\ dv = (x+1)\ \ dx & \Rightarrow & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}\right\}$$

$$I\left(x\right) = \frac{x^2+2x}{2}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x+1\right) - \int \frac{x^2+2x}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = \frac{x^2+2x}{2}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right) - I_1\left(x\right) \qquad \textbf{(1)}$$

$$I_1\left(x\right) = \int \frac{x^2+2x}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = \int \frac{x^2+2x}{\sqrt{4x-4x^2}}\,dx = \left(Ax+B\right)\cdot\sqrt{4x-4x^2} + \int \frac{M}{\sqrt{4x-4x^2}}\,dx$$

$$\frac{x^2+2x}{\sqrt{4x-4x^2}} = A\cdot\sqrt{4x-4x^2} + \left(Ax+B\right)\cdot\frac{4-8x}{2\cdot\sqrt{4x-4x^2}} + \frac{M}{\sqrt{4x-4x^2}}$$

$$x^2 + 2x = A\cdot\left[4x-4x^2\right] + \left(Ax+B\right)\cdot\left(2-4x\right) + M$$

- 2º: $1 = -4A - 4A \quad \Rightarrow \quad A = -\dfrac{1}{8}$
- 1º: $2 = 4A + 2A - 4B \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{-11}{16}$
- 0º: $0 = 2B + M \quad \Rightarrow \quad M = \dfrac{11}{8}$

$$I_1\left(x\right) = \int \frac{x^2+2x}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = \left(\frac{-1}{8}x - \frac{11}{16}\right)\cdot\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2} + \int \frac{\frac{11}{8}}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = -\frac{1}{16}\cdot\left(2x+11\right)\cdot\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2} + I_2\left(x\right)$$

$$\textbf{(1)} \Rightarrow \quad I\left(x\right) = \frac{x^2+2x}{2}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right) + \frac{1}{16}\cdot\left(2x+11\right)\cdot\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2} - I_2\left(x\right) \qquad \textbf{(2)}$$

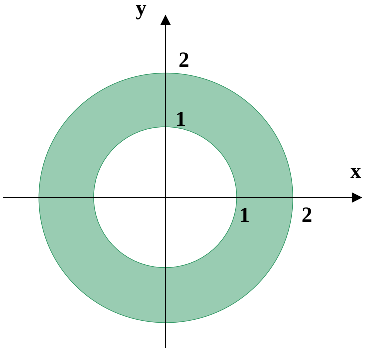
$$I_2\left(x\right) = \frac{11}{8}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = \frac{11}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2}{\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}}\,dx = \frac{11}{16}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right)$$

$$\textbf{(2)} \Rightarrow \quad I\left(x\right) = \frac{x^2+2x}{2}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right) + \frac{1}{16}\cdot\left(2x+11\right)\cdot\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2} - \frac{11}{16}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right) + C$$

$$\Rightarrow \quad I\left(x\right) = \frac{8x^2+16x-11}{16}\cdot \operatorname{arcsen}\left(2x-1\right) + \frac{2x+11}{16}\cdot\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2} + C$$

Ejercicio 4.

Calcula $I = \iint_R \frac{1+\operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$ donde R es el recinto plano determinado por los puntos de la corona circular de centro el origen, radio interior 1 y radio exterior 2.



El recinto de integración es claramente simétrico respecto de los ejes coordenados (ver figura).

Hay una parte de la función subintegral que es par y la otra que es impar. Por lo tanto las separamos:

$$I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy + \iint_R \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = I_1 + I_2$$

Puesto que R es simétrico respecto del eje X y la función subintegral de I_2 es impar en "y" se concluye que dicha integral es nula $\Rightarrow \quad I_2 = \iint_R \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = 0$

Puesto que R es simétrico respecto de los dos ejes coordenados y la función subintegral de I_1 es par en las variables "x" e "y" se concluye que dicha integral es: $\Rightarrow \quad I_1 = 4 \cdot \iint_{R_1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

Donde R_1 es la parte de R correspondiente al primer cuadrante. Al ser una corona esférica es interesante pasar a polares

$$I_1 = 4 \cdot \iint_{R_1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = 4 \cdot \iint_{R_1} \frac{1}{\rho} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = 4 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left[\int_{\rho=1}^{\rho=2} d\rho \right] d\theta = 4 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} 1\, d\theta = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

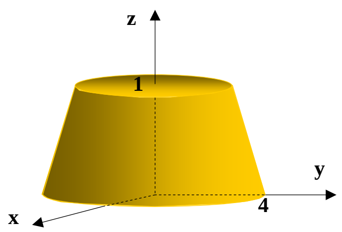
Por lo tanto:

$$I = 2\,\pi$$

Ejercicio 5.

Calcula, utilizando cualquier técnica de integración, el volumen del sólido Q: $\left\{ \begin{array}{l} z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \le z \le 1 \end{array} \right\}$

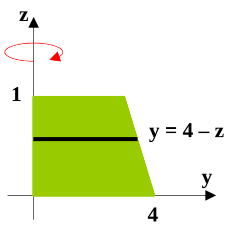
La primera superficie $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ se corresponde con la hoja inferior de la superficie cónica con vértice en (0, 0, 4). La inecuación $z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ se corresponde con los puntos interiores a dicha hoja.



Por otra parte, la segunda inecuación $0 \le z \le 1$ se corresponde con los puntos de la franja espacial limitada por los planos z = 0 y z = 1.

El resultado definitivo es que el sólido Q es un tronco de cono como el de la figura adjunta.

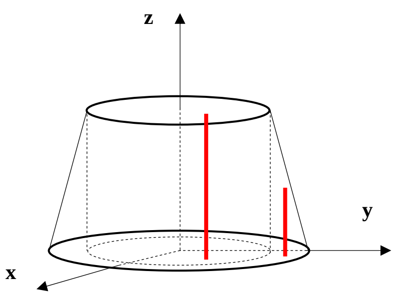
Primer método:

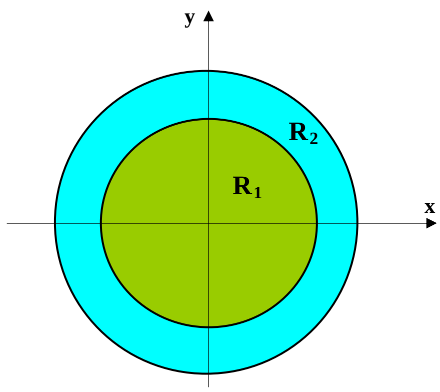


Al girar el recinto plano de la figura alrededor del eje OZ genera el sólido Q. Tomando el eje OZ como referencia, tenemos como intervalo de trabajo el [0, 1]. En cuanto a la franja horizontal correspondiente a un punto de dicho intervalo está limitada inferiormente por el eje y = 0 y superiormente por la recta generatriz del cono que debemos calcular. Haciendo x = 0 en la ecuación del cono, obtenemos las ecuaciones de las generatrices correspondientes al plano YZ: $z = 4 - \sqrt{y^2} \Rightarrow z = 4 \pm y$ siendo $z = 4 - y$ la representada en la figura. En resumen, $0 \le y \le 4 - z$. La franja mencionada genera un disco al girar.

$$V = \int_0^1 \pi \cdot \left[(4-z)^2 - (0)^2 \right] dz = \pi \cdot \int_0^1 (4-z)^2 \, dz = \pi \cdot \left[-\frac{(4-z)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \cdot \left[-3^3 + 4^3 \right] = \frac{37\,\pi}{3} \, u^3$$

Segundo método:





Según se aprecia en las figuras, las superficies que limitan el sólido dependen de en qué punto nos encontramos, si es un punto de R_1 las superficies límites son z = 0 y z = 1. Si el punto es de R_2 entonces las superficies límites son z = 0 y $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Debemos determinar tanto R_1 como R_2.

$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \; x^2 + y^2 = 3^2$ Por lo tanto R_1 es el circulo de centro el origen y radio 3.

$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \; x^2 + y^2 = 4^2$ Por lo tanto R_2 es la corona circular de centro el origen y radios 3 y 4.

$$V = \iint_{R_1} [1-0]\, dx\, dy + \iint_{R_2} \left[\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)-0\right] dx\, dy = \iint_{R_1} 1\, dx\, dy + \iint_{R_2} 4-\sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \iint_{R_1} 1\, dx\, dy = A(R_1) = \pi \cdot 3^2$$

$$I_2 = \iint_{R_2} \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy = \{\text{ Polares }\} = \iint_{M_2} (4-\rho) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \cdot \int_{\rho=3}^{\rho=4} \left(4\rho - \rho^2\right) d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left[4\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_3^4 = 2\pi \cdot \left[\left(\frac{64}{2}-\frac{64}{3}\right)-\left(\frac{36}{2}-\frac{27}{3}\right)\right] = \frac{10\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V = 9\pi + \frac{10\pi}{3} = \frac{37\pi}{3}\, u^3$$

<u>Otros métodos:</u>

Se puede hacer por secciones, ya que las secciones perpendiculares al eje OZ son círculos. Esto nos llevará a un cálculo idéntico al de giro.

También se puede hacer por medio de integral triple. Sin embargo al pasar a cilíndricas resulta un cálculo idéntico al realizado mediante integración doble.

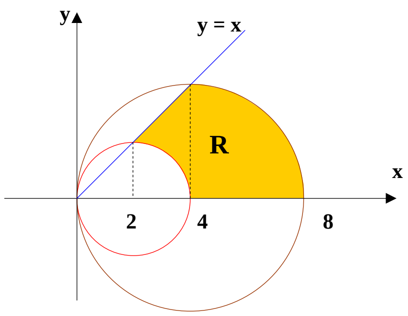
Ejercicio 6.

Calcula el área del recinto R del primer cuadrante:

$$\mathbf{R = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \;/\; x^2 + y^2 - 4x \geq 0 \qquad x^2 + y^2 - 8x \leq 0 \qquad 0 \leq y \leq x \right\}}$$

$x^2 + y^2 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + y^2 = 4$ Es una circunferencia centrada en (2,0) y radio 2

$x^2 + y^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; (x-4)^2 + y^2 = 16$ Es una circunferencia centrada en (4,0) y radio 4



$$A(R) = \iint_R 1\,dx\,dy = \iint_M 1 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

Los argumentos de los puntos de R varían entre 0 y $\frac{\pi}{4}$

Las ecuaciones de las circunferencias en polares son:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 - 4\rho\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \rho = 4\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 - 8x = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 - 8\rho\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \rho = 8\cos\theta$$

$$\Rightarrow\; A(R) = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left[\int_{\rho=4\cos\theta}^{\rho=8\cos\theta} \rho\, d\rho \right] d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=4\cos\theta}^{\rho=8\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left[64\cos^2\theta - 16\cos^2\theta \right] d\theta = 24 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 24 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = 12 \left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 12 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = 3\pi + 6 \quad u^2$$