Ejercicio 1.

Dada la función: $\mathbf{f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 3}$

a) **Halla sus extremos relativos**

b) **Halla sus extremos absolutos en** $\mathbf{[-1, 1]}$

a) En este apartado el intervalo de estudio es: Dom (f) = $\Re$

1º Puntos críticos:

$$f'(x) = 10x^4 - 20x^3$$

- Puntos en los que no hay derivada en el intervalo de estudio: Ninguno
- Puntos en los que la derivada es nula en el intervalo de estudio.

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^4 - 20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 \cdot (x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

2º Análisis de los puntos críticos

$f''(x) = 40x^3 - 60x^2$

$x_1 = 0$:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ Debemos pasar al estudio de la derivada de orden superior.

$f'''(x) = 120x^2 - 120x$

$f'''(0) = 0 \Rightarrow$ Debemos proseguir en el estudio de las derivadas sucesivas

$f^{4)}(x) = 240x - 120$

$f^{4)}(0) < 0 \Rightarrow$ Al ser de orden par la primera derivada no nula, se alcanza extremo en dicho punto. Dado que tal derivada es negativa, se concluye que se alcanza un máximo relativo en x = 0.

$x_2 = 2$:

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ Al ser de orden par la primera derivada no nula, se alcanza extremo en dicho punto. Dado que tal derivada es positiva, se concluye que se alcanza un mínimo relativo en x = 2.

b) Ya conocemos los puntos críticos. De ellos únicamente el $x_1 = 0$ pertenece al nuevo intervalo de estudio

Comparación:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -4 \\ f(1) = 0 \\ f(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

El menor valor (-4) se alcanza en x = -1 el cual pertenece al intervalo de estudio, siendo el mínimo absoluto.

El mayor valor (3) se alcanza en x = 0 que también pertenece al intervalo de estudio, siendo el máximo absoluto.

Ejercicio 2.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $I_1(x) = \int \frac{L(x^2+1)}{(1-x)^3}\,dx$ **b)** $I_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (3+4\,tg\,x)^2}$

a) En cuanto que en la función subintegral aparece una función trascendente (el logaritmo), lo primero que debemos de intentar es deshacernos de ella. Un medio para lograrlo es el método de partes.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = L(x^2+1) & \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ dv = (1-x)^{-3}\,dx & \Rightarrow v = -\frac{(1-x)^{-2}}{-2} \end{array}\right\} \quad I(x) = \frac{L(x^2+1)}{2(1-x)^2} - \int \frac{1}{2(1-x)^2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{L(x^2+1)}{2(1-x)^2} + I_1(x)$$

$$I_1(x) = \int \frac{x}{(1-x)^2\,(1+x^2)}\,dx$$

Descomposición en fracciones simples: una raíz real doble y dos complejas conjugadas simples

$$\frac{x}{(1-x)^2\,(1+x^2)} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{Mx+N}{1+x^2}$$

$$x = A_1\cdot(1-x)\,(1+x^2) + A_2\cdot(1+x^2) + (Mx+N)\cdot(1-x)^2$$

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\cdot A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2}$$

$$3º: \quad \Rightarrow \quad 0 = -A_1 + M \quad \Rightarrow \quad M = A_1$$

$$0º: \quad \Rightarrow \quad 0 = A_1 + A_2 + N \quad \Rightarrow \quad N = -A_1 - \frac{1}{2}$$

$$2º: \quad \Rightarrow \quad 0 = A_1 + A_2 - 2M + N \quad \Rightarrow \quad 0 = A_1 + \frac{1}{2} - 2A_1 - A_1 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 = -2A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = 0 \\ N = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$A_1 = 0$, $A_2 = ½$, $M = 0$, $N = -½$

$$I_1(x) = \int \frac{1/2}{(1-x)^2}\,dx + \int \frac{-1/2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,arc\,tg(x)$$

$$\mathbf{I_1(x) = \frac{L(x^2+1)}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2}\,arc\,tg(x) + C}$$

b) $$I_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot(3+4\,tg\,x)^2} = \int (3+4\,tg\,x)^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int (3+4\,tg\,x)^{-2}\cdot\frac{4}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(3+4\,tg\,x)^{-1}}{-1} + K$$

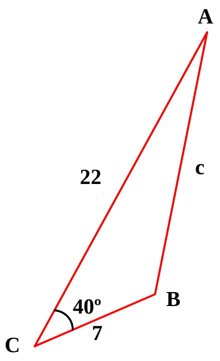
$$\mathbf{I_2(x) = \frac{-1}{4\cdot(3+4\,tg\,x)} + K}$$

Ejercicio 3.

a) En un triángulo ABC se sabe que: a = 7 cm, b = 22 cm, $\hat{C} = 40^o$ Calcula la longitud del otro lado, así como el valor de los otros ángulos, tanto en radianes, como en grados, minutos y segundos.

b) Resuelve: $-1 < \dfrac{3x+1}{2x-1} < 2$

a)



Teorema del coseno:

$$c^2 = 22^2 + 7^2 - 2 \cdot 22 \cdot 7 \cdot \cos 40^o = 297{,}058$$

$$\Rightarrow \quad c = 17{,}24 \text{ cm}$$

Teorema del coseno:

$$7^2 = 22^2 + 17{,}24^2 - 2 \cdot 22 \cdot 17{,}24 \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{732{,}21}{758{,}56} = 0{,}2643$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} = 0{,}2643 \text{ rad} \cong 15^o\, 8'\, 37''$$

$$\hat{B} = \pi - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = \pi - 0{,}9624 = 2{,}18 \text{ rad} \cong 124^o\, 51'\, 22{,}2''$$

b) $\boldsymbol{-1 < \dfrac{3x+1}{2x-1} < 2}$

- $-1 < \dfrac{3x+1}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{3x+1}{2x-1} + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{3x+1+2x-1}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{5x}{2x-1}$

$5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$5x$	-	+	+
$2x-1$	-	-	+
$\dfrac{5x}{2x-1}$	**+**	**-**	**+**

$$\Rightarrow \quad -1 < \frac{3x+1}{2x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

- $\dfrac{3x+1}{2x-1} < 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x+1}{2x-1} - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x+1-4x+2}{2x-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3-x}{2x-1} < 0$

$3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1/2$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 3)$	$(3, +\infty)$
$3-x$	+	+	-
$2x-1$	-	+	+
$\dfrac{3-x}{2x-1}$	**-**	**+**	**-**

$$\Rightarrow \quad \frac{3x+1}{2x-1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$$

$$\boldsymbol{-1 < \frac{3x+1}{2x-1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \right] \cap \left[\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \right] \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)}$$

Ejercicio 4.

Sea f una función continua en un intervalo de la forma [-a, a], donde a es un valor real positivo.

Prueba analíticamente que, si f es impar, entonces: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

Puesto que la propiedad de imparidad hace referencia a puntos simétricos, separemos la integral en dos:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = I_1 + I_2$$

Ahora se debe probar la relación que existe entre ambas debido a la imparidad de la función.

En la primera integral se aplica un cambio de variable:

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio}: t = -z \\ \quad dt = -dz \\ t = -a \;\Rightarrow\; z = a \\ t = 0 \;\Rightarrow\; z = 0 \end{array} \right\} = \int_{a}^{0} f(-z)\cdot(-dz) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Inversión de} \\ \text{los límites de} \\ \text{integración} \end{array} \right\} = \int_{0}^{a} f(-z)\cdot dz$$

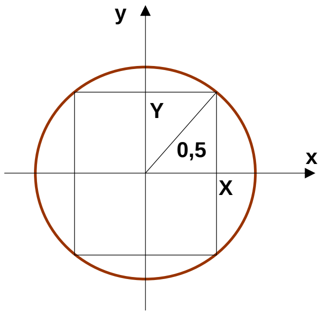
Ahora, si se tiene en cuenta que por ser la función subintegral impar: $f(-z) = -f(z)$

$$I_1 = \int_{0}^{a} f(-z)\cdot dz = \int_{0}^{a} -f(z)\cdot dz = -\int_{0}^{a} f(z)\cdot dz = -I_2$$

Es decir, las dos integrales son opuestas $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = I_1 + I_2 = 0$

Ejercicio 5.

La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcula las dimensiones de la viga más resistente, que puede hacerse a partir de un tronco de madera cilíndrico de radio 0,5 m.



La resistencia de la viga es: $R = K \cdot a \cdot h^2$ Donde: a = anchura h = altura

De la figura se tiene que: $a = 2\,x$ $h = 2\,y$

$$\Rightarrow \quad R = K \cdot 2x \cdot 4\,y^2 = 8K\;x\,y^2$$

Pero también en la misma figura se aprecia que:

$$y^2 = 0{,}5^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad R = 8K\;x\,y^2 = 8K\;x\left(0{,}5^2 - x^2\right) = 8K\left(0{,}5^2 x - x^3\right)$$

Se trata de hallar el máximo absoluto de la función R para valores de $x \in [0, 0.5]$

Puntos críticos de R:

$$\Rightarrow \quad R' = 8K\left(0{,}5^2 - 3\,x^2\right)$$

Puntos en los que carece de derivada: Ninguno

Puntos en los que tiene derivada nula: $x = \pm\sqrt{\dfrac{0.5^2}{3}} \Rightarrow \quad x = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{3}}$ (Ya que el signo de x es positivo)

Comparación de valores:

$$R(0) = 0 \qquad R(0{,}5) = 0 \qquad R\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

Por lo que el máximo absoluto se alcanza cuando $x = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{3}}$

Es decir, las dimensiones pedidas son: $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ m $\qquad h = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ m

<u>Ejercicio 6</u>.

$$\mathbf{f(x, y) = \begin{cases} x^2\, y^2\, \mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}}$$

Sabiendo que la función f(x, y) es diferenciable en el punto: $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ Calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto en la dirección y sentido del vector $\vec{h} = \vec{i} - \vec{j}$

Puesto que la función es diferenciable en el punto $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ las derivadas direccionales se pueden calcular más fácilmente mediante el uso del vector gradiente. Basta recordar que:

$$D_{\vec{h}} f\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) = \vec{\nabla} f\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot \left[2x \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] =$$

$$= y^2 \cdot \left[2x \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdot \left[2y \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + y^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{-x \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] =$$

$$= x^2 \cdot \left[2y \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - y^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi^3}$$

$$\vec{\nabla} f\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi^3}\vec{i} + \frac{2}{\pi^3}\vec{j} = \frac{2}{\pi^3} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$D_{\vec{h}} f\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) = \vec{\nabla} f\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right) \cdot \frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|} = \frac{2}{\pi^3}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) \cdot \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = 0$$