ARQUITECTURA: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

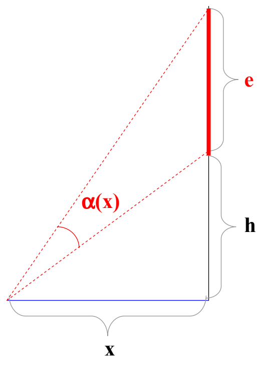
Primer Parcial **5 de diciembre de 2007** **Curso 2007/2008**

Duración: 2 horas

Apellidos y Nombre: **N.P. :**

Ejercicio 1. (2 puntos)

Una estatua de altura 5 m está situada sobre un pedestal de altura 4 m. Determina, a nivel del suelo, la distancia al centro del pedestal, desde la que se ve dicha estatua con un ángulo máximo.



Designaremos dicha distancia como "x". Ver la figura anexa.

El ángulo que se desea sea máximo es $\alpha(x)$.

$$\alpha(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{9}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4}{x}\right) \qquad 0 \le x < \infty$$

Lo que buscamos es el máximo absoluto de la función $\alpha(x)$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

1º Puntos críticos:

$$\alpha'(x) = \frac{-\frac{9}{x^2}}{1+\left(\frac{9}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{4}{x^2}}{1+\left(\frac{4}{x}\right)^2} = -\frac{9}{x^2+9^2} + \frac{4}{x^2+4^2} = \frac{4x^2+4\cdot 81-9x^2-9\cdot 16}{\left(x^2+9^2\right)\cdot\left(x^2+4^2\right)} = \frac{180-5x^2}{\left(x^2+9^2\right)\cdot\left(x^2+4^2\right)}$$

1.1-. Puntos en los que $\alpha(x)$ carece de derivada: Ninguno

1.2-. Puntos en los que $\alpha(x)$ tiene derivada nula:

$$\alpha'(x) = 0 \Rightarrow \quad 180 - 5x^2 = 0 \Rightarrow \quad x^2 = 36 \Rightarrow \quad x = \pm 6$$

La solución negativa no es válida ya que no pertenece al intervalo de estudio. El único punto crítico es:

$$x_0 = 6$$

2º Comparación de valores:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(0) = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \\[2ex] \alpha(+\infty) = \operatorname{arc\,tg}(0) - \operatorname{arc\,tg}(0) = 0 - 0 = 0 \\[2ex] \alpha(x_0) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{9}{6}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{4}{6}\right) = 0{,}39 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

El mayor valor es 0,39 rad, que es alcanzado cuando se está a una distancia de 6m del centro de la estatua.

__Ejercicio 2__. **(2,5 puntos)**

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva: $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa igual a 1.

b) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f(x) en todos los puntos de $\Re$

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) La función derivada es: $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 1 coincide con el valor de la derivada en dicho punto:

$$y'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente en un punto de abscisa x = a es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x = 1 es:

$$y - 1 = (-1) \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x$$

b) Como se aprecia, la función está definida en todos los puntos. Por lo tanto:

$$\text{Dom}(f) = \Re$$

Continuidad:

Estudiamos la continuidad en los puntos $x \neq 0$

- $\frac{1}{x}$ Es continua por ser una función racional cuyo denominador no se anula.
- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Es continua por ser composición de funciones continuas.
- x Es continua por ser polinómica.

f(x) es continua en todo punto $x \neq 0$ por ser producto de funciones continuas.

Estudiamos la continuidad en el punto $x = 0$

Al ser un punto aislado se debe estudiar la continuidad mediante la definición.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ Ya que es el producto de una función que tiende a cero por otra que está acotada.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

f(x) es continua en el punto x = 0.

Por lo tanto, f(x) es continua en todo punto de $\Re$

Derivabilidad:

Derivabilidad en los puntos $x \neq 0$

$$\frac{df}{dx}(x) = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

La derivada existe en todo punto $x \neq 0$

Por lo tanto f(x) es derivable en los puntos $x \neq 0$

Derivabilidad en el punto x = 0.

Es un punto aislado, por lo que es necesario hallar la derivada por definición:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$ **No hay límite.**

Por lo tanto no es derivable en x = 0

f(x) es derivable en $\Re - \{0\}$

Ejercicio 3. **(2 puntos)**

a) Calcula las derivadas parciales de primer orden de la siguiente función:

$$f_1(x, y) = \left(x^2 y + y^3\right) \cdot e^{xy} + \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

b) Sabiendo que la función: $f_2(x, y) = Ln\left(x^2 + xy\right)$ es diferenciable en el punto (1, 0), calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto según el vector: $\vec{h} = \vec{i} + \vec{j}$.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \cdot e^{xy} + \left(x^2 y + y^3\right) \cdot y \cdot e^{xy} + \cos\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(x^2 + 3y^2\right) \cdot e^{xy} + \left(x^2 y + y^3\right) \cdot x \cdot e^{xy} + \cos\left(\frac{x^2}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

b) Puesto que f(x) es diferenciable en el punto (1, 0) existe el vector gradiente en dicho punto, lo que nos permite hallar la derivada direccional buscada de una forma sencilla.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2x + y}{x^2 + xy} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + xy} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(1, 0) = 2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$$

$$D_{\vec{h}} f(1, 0) = \vec{\nabla} f(1, 0) \bullet \frac{\vec{h}}{\left|\vec{h}\right|} = \left(2 \cdot \vec{i} + \vec{j}\right) \bullet \frac{\left(\vec{i} + \vec{j}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 4. (2 puntos)

Resuelve: $0 < \dfrac{3x-8}{x^2-1} < 1$

- $\dfrac{3x-8}{x^2-1} < 1 \Rightarrow \dfrac{3x-8}{x^2-1} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{3x-8-x^2+1}{x^2-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+3x-7}{x^2-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x+7}{x^2-1} > 0$

Hallamos los puntos críticos:

$x^2-3x+7=0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-28}}{2}$ Carece de raíces reales. Representa gráficamente una parábola abierta hacia arriba (ya que el coeficiente cuadrático es positivo) que no corta al eje en ningún punto. Es decir:

$$x^2-3x+7>0 \quad \forall x \in \Re$$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ Representa gráficamente una parábola abierta hacia arriba (ya que el coeficiente cuadrático es positivo) que corta al eje en los puntos: $x=\pm 1$. Es decir:

$$x^2-1>0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

Por lo tanto: $\dfrac{x^2-3x+7}{x^2-1} > 0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

- $0 < \dfrac{3x-8}{x^2-1}$

Los puntos críticos son: $x = \dfrac{8}{3}$, $x=-1$, $x=1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$\left(1,\frac{8}{3}\right)$	$\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$
$3x-8$	-	-	-	+
x^2-1	+	-	+	+
$\frac{3x-8}{x^2-1}$	-	+	-	+

$$0 < \frac{3x-8}{x^2-1} \iff x \in (-1,1) \cup \left(\frac{8}{3},+\infty\right)$$

$$0 < \frac{3x-8}{x^2-1} < 1 \iff x \in \{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\} \cap \left\{(-1,1)\cup\left(\frac{8}{3},+\infty\right)\right\} = \left(\frac{8}{3},+\infty\right)$$

<u>Ejercicio 5</u>. (1 punto)

$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$. Reconoce el tipo de cónica que representa y realiza una esbozo de la misma.

$$\left.\begin{array}{l} A = 1 \neq 0 \; ; B = 4 \neq 0 \\ A \neq B \\ \text{signo}(A) = \text{signo}(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Elipse}$$

$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1$

$4y^2 - 8y = 4 \cdot \left[y^2 - 2y \right] = 4 \cdot \left[(y-1)^2 - 1^2 \right] = 4(y-1)^2 - 4$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$(x+1)^2 - 1 + 4(y-1)^2 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow \quad (x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \Rightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$$

Centro: (-1, 1), semieje x: 2, semieje y: 1