ARQUITECTURA: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

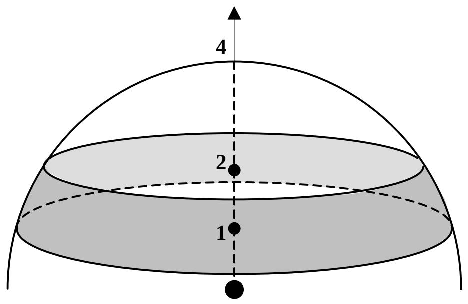
Examen Final (Segundo Cuatrimestre) **Curso 2006/2007**

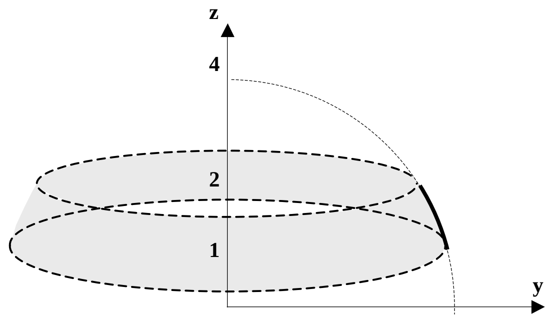
8 de Junio de 2007 **Duración: 2 horas**

Apellidos y Nombre: **N. P. :**

Ejercicio 1. (2,5 puntos)

Calcula el área de la superficie esférica: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ comprendida entre los planos: $z = 2$, $z = 1$.





La superficie está representada en la figura de la izquierda. Se aprecia que no es una superficie vertical pero que sí es de revolución. El arco de curva que genera la superficie por giro alrededor del eje OZ se ve en la figura de la derecha. Es el arco de la circunferencia: $y^2 + z^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{16 - z^2}$

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 |y(z)| \cdot \sqrt{1 + [y'(z)]^2}\, dz = 2\pi \int_1^2 \sqrt{16 - z^2} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-2z}{2\sqrt{16 - z^2}}\right]^2}\, dz =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{16 - z^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{z^2}{16 - z^2}}\, dz = 2\pi \int_1^2 \sqrt{16 - z^2} \cdot \sqrt{\frac{16 - z^2 + z^2}{16 - z^2}}\, dz = 2\pi \int_1^2 \sqrt{16 - z^2} \cdot \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16 - z^2}}\, dz =$$

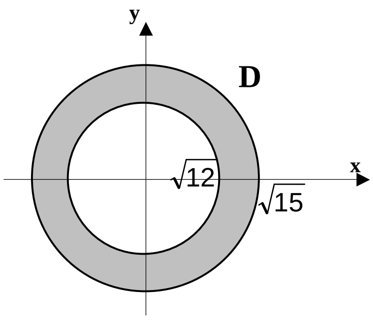
$$= 8\pi \int_1^2 1\, dz = 8\,\pi\, u^2$$

OTRO MÉTODO:

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ z=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2=12$$

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2=15$$

La proyección de la superficie sobre el plano XY es la corona circular D, comprendida entre los círculos de radios $\sqrt{12}$ y $\sqrt{15}$



$$S:\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)} \end{cases} \qquad \forall(x,y)\in D$$

$$\vec{r}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}\,\vec{k}$$

$$\vec{r}'_x(x,y)=\vec{i}-\frac{x}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}\,\vec{k} \quad ; \quad \vec{r}'_y(x,y)=\vec{j}-\frac{y}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}\,\vec{k}$$

$$\vec{r}'_x(x,y)\times\vec{r}'_y(x,y)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{x}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{y}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}} \end{vmatrix}=\frac{x}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}\,\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}\,\vec{j}+\vec{k}$$

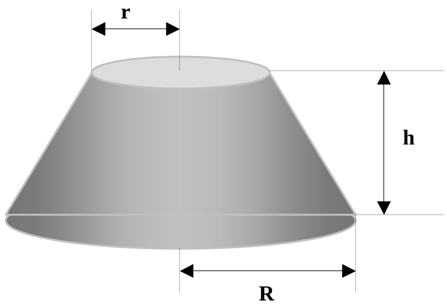
$$\left|\vec{r}'_x(x,y)\times\vec{r}'_y(x,y)\right|=\sqrt{\frac{x^2}{16-\left(x^2+y^2\right)}+\frac{y^2}{16-\left(x^2+y^2\right)}+1}=\sqrt{\frac{16}{16-\left(x^2+y^2\right)}}=\frac{4}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}$$

$$A(S)=\iint_S 1\,dS=\iint_D\left|\vec{r}'_x(x,y)\times\vec{r}'_y(x,y)\right|dx\,dy=\iint_D\frac{4}{\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}}\,dx\,dy=\{\text{Polares}\}=$$

$$=\iint_M\frac{4}{\sqrt{16-\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\int_{\rho=\sqrt{12}}^{\rho=\sqrt{15}}\frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}\,d\rho\right]d\theta=4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[-\sqrt{16-\rho^2}\right]_{\sqrt{12}}^{\sqrt{15}}d\theta=4\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}1\,d\theta=8\pi\,u^2$$

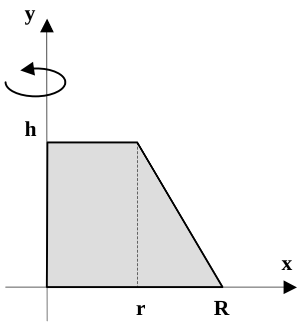
<u>Ejercicio 2</u>. (2,5 puntos)

Calcula el volumen del tronco de cono de radios: r = 1, R = 2, y de altura: h =3.



Puesto que la proyección implica a dos recintos: el circulo de radio "r" y la corona circular de radios "r" y "R", parece más sencillo calcular el volumen de este sólido por giros.

En efecto, el sólido es de revolución y se obtiene por el giro del recinto de la figura inferior: un trapecio alrededor del eje OY.



Si elegimos el eje OX como referencia, se tiene que tener en cuenta dos intervalos. Sin embargo eligiendo el eje OY sólo se tiene uno.

Se necesita conocer la ecuación de la arista inclinada: x = m y + n

Dicha recta pasa por los puntos (R, 0) y (r, h)

$$\left.\begin{cases}(R,0) \Rightarrow R = n \\ (r,h) \Rightarrow r = mh + n\end{cases}\right\} \Rightarrow n = R \Rightarrow m = \frac{r-R}{h}$$

Y la ecuación de dicha recta es: $x = \frac{r-R}{h} y + R \Rightarrow x = -\frac{1}{3} y + 2$

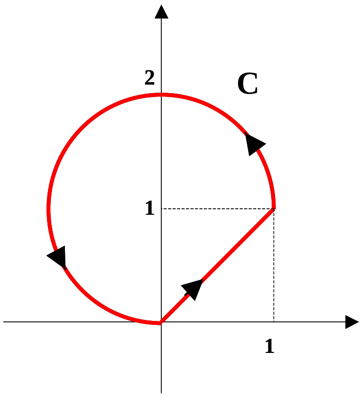
Eje de referencia OY: $[0,3]$; $x = 0$; $x = -\frac{1}{3} y + 2$

La franja horizontal correspondiente genera un disco.

$$V = \int_0^3 \pi R^2 \Delta = \int_0^3 \pi \cdot \left(-\frac{1}{3} y + 2\right)^2 dy = \pi \cdot (-3) \cdot \int_0^h -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} y + 2\right)^2 dy = \pi \cdot (-3) \cdot \left[\frac{\left(-\frac{1}{3} y + 2\right)^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \pi \cdot (-1) \cdot [1-8] = 7\pi \quad u^3$$

Ejercicio 3. **(2,5 puntos)**



Calcula: $I = \int_C x\cdot\left(1+y^2\right)dx + xy\cdot\left(x-1\right)dy$

¿Es el campo conservativo?

$$M(x,y) = x\cdot\left(1+y^2\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$$

$$N(x,y) = y\cdot\left(x^2-x\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \;\Rightarrow\; \text{El campo no es conservativo}$$

Sin embargo la diferencia entre las derivadas parciales anteriores es mínima. Puesto que además la curva es cerrada y orientada positivamente, podemos intentar hacerlo mediante el teorema de Green:

$I = \iint_D \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dx\,dy = \iint_D -y\,dx\,dy$ Siendo D el recinto plano que encierra la curva C. Vemos que el recinto es parte de un círculo por lo que lo más conveniente es el paso a polares. Puede observarse que los argumentos de los puntos de D varían entre los $\frac{\pi}{4}$ y los π radianes. En cuanto a ρ, las distancias de los puntos del recinto D al origen varían entre 0 y la distancia de los puntos de la circunferencia cuya ecuación en polares debemos calcular:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + 1 - 2y = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 2y \;\Rightarrow\; \rho^2 = 2\rho\,\text{sen}\theta \;\Rightarrow\; \rho = 2\,\text{sen}\theta$$

$$I = \iint_M -\rho\,\text{sen}\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = -\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi}\left[\int_{\rho=0}^{\rho=2\,\text{sen}\theta}\rho^2\cdot\text{sen}\theta\,d\rho\right]d\theta = -\int_{\pi/4}^{\pi}\text{sen}\theta\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\,\text{sen}\theta}d\theta = -\frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\text{sen}^4\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(\text{sen}^2\theta\right)^2 d\theta = -\frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = -\frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(1 - 2\cdot\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right)d\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(1 - 2\cdot\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right)d\theta = -\frac{2}{3}\int_{\pi/4}^{\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cdot\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)\right)d\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\theta - 2\cdot\frac{\text{sen}(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}(4\theta)}{4}\right)_{\pi/4}^{\pi} = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\pi - \left(\frac{3}{2}\,\frac{\pi}{4} - 1\right)\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 1\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{3}{4} + 1\right) =$$

$$= -\frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3}$$

Ejercicio 3. **OTRO MÉTODO:**

Puesto que la diferencia entre las derivadas parciales anteriores es mínima. Podemos intentar expresar el campo como suma de dos, de manera que uno de ellos sí que sea conservativo.

$$I = \int_C x\cdot\left(1+y^2\right)dx + xy\cdot(x-1)\,dy = \int_C \left(x\cdot\left(1+y^2\right)dx + x^2y\,dy\right) - xy\,dy = \int_C x\cdot\left(1+y^2\right)dx + x^2y\,dy - \int_C xy\,dy = I_1 - I_2$$

I_1:

Las componentes de este campo son:

$$M_1(x,y) = x\cdot\left(1+y^2\right) \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = 2xy$$

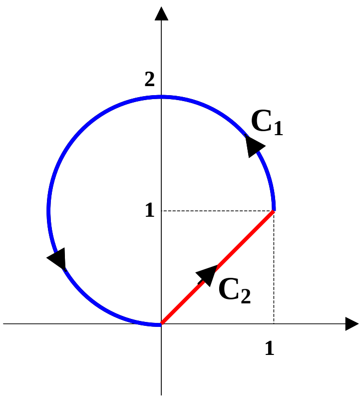
$$N_1(x,y) = x^2y \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow$$ El campo sí es conservativo

Como la curva C es cerrada, se tiene: $I_1 = 0$

I_2:

$$I_2 = \int_C xy\,dy = \int_{C_1+C_2} xy\,dy = \int_{C_1} xy\,dy + \int_{C_2} xy\,dy = I_{21} + I_{22}$$



$$C_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1+\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{3\pi}{2} \quad \begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$I_{21} = \int_0^{3\pi/2} \cos t\cdot\left(1+\operatorname{sen} t\right)\cdot\cos t\,dt = \int_0^{3\pi/2}\left(\cos^2 t + \cos^2 t\cdot\operatorname{sen} t\right)dt =$$

$$= \int_0^{3\pi/2}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2} + \cos^2 t\cdot\operatorname{sen} t\right)dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}$$

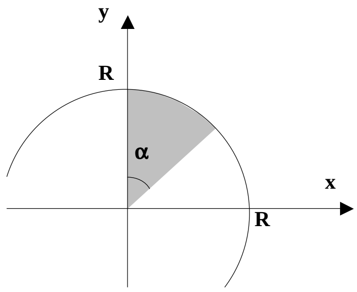
$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \quad \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$$

$$I_{22} = \int_0^1 t\cdot t\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

<u>Ejercicio 4</u>. (2,5 puntos)



Calcula el área de un sector circular de radio R y ángulo α (Ver figura)

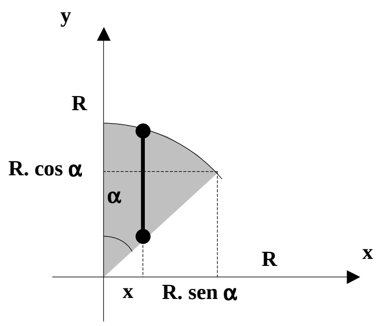
Si denominamos D al sector, se tiene: $A(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$

Puesto que es circular pasamos a polares:

$$A(D) = \iint_M \rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho\,d\rho \right] d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot \int_{\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\theta=\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha \quad u^2$$

Otro método:

Las curvas que delimitan el recinto son:



El eje OY: x = 0. La circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$ La recta $y = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x$

Eje de referencia OX: $[0, R\operatorname{sen}\alpha]$; $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $y = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x$

$$A = \int_0^{R\operatorname{sen}\alpha} \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) - \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x \right) \right] dx =$$

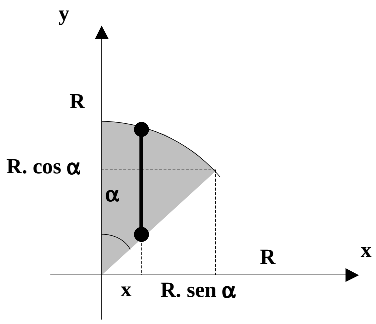
$$= \int_0^{R\operatorname{sen}\alpha} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx - \int_0^{R\operatorname{sen}\alpha} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot x\,dx = A_1 - A_2$$

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio} : x = R\operatorname{sen} z \\ dx = R\cos z\,dz \\ x = 0 \to z = 0 \\ x = R\operatorname{sen}\alpha \to z = \alpha \end{array} \right\} = \int_0^{\alpha} \sqrt{R^2 - R^2\operatorname{sen}^2 z} \cdot R\cos z\,dz = R^2 \cdot \int_0^{\alpha} \cos^2 z\,dz = R^2 \cdot \int_0^{\alpha} \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \left[z + \frac{\operatorname{sen} 2z}{2} \right]_0^{\alpha} = \frac{R^2}{2} \cdot \left[\alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} \right] = \frac{R^2}{2} \cdot \left[\alpha + \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} \right] = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha + \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$A_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \int_0^{R\operatorname{sen}\alpha} x\,dx = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{R\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{R^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{R^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha \quad (u^2)$$



Eje de referencia OX: $\left[0, R\,\text{sen}\alpha\right]$; $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $y = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \cdot x$

La franja correspondiente genera al girar un tubo: $V = \int_a^b 2\pi R h \Delta$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^{R\,\text{sen}\alpha} x \cdot \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) - \left(\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \cdot x \right) \right] dx = 2\pi \cdot \int_0^{R\,\text{sen}\alpha} x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\, dx - \frac{2\pi}{\text{tg}\,\alpha} \cdot \int_0^{R\,\text{sen}\alpha} x^2\, dx =$$

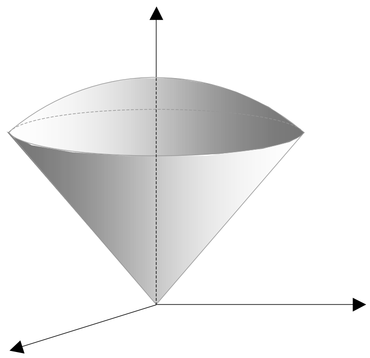
$$= \frac{2\pi}{-2} \cdot \int_0^{R\,\text{sen}\alpha} -2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\, dx - \frac{2\pi}{\text{tg}\,\alpha} \cdot \int_0^{R\,\text{sen}\alpha} x^2\, dx = -\pi \cdot \left[\frac{\left[R^2 - x^2\right]^{3/2}}{3/2} \right]_0^{R\,\text{sen}\alpha} - \frac{2\pi}{\text{tg}\,\alpha} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{R\,\text{sen}\alpha} =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left(R^3 \cos^3\alpha - R^3\right) - \frac{2\pi}{3\,\text{tg}\,\alpha} \cdot \left[R^3 \text{sen}^3\alpha\right] = -\frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \left[\cos^3\alpha + \frac{\text{sen}^3\alpha}{\text{tg}\,\alpha} - 1 \right] = -\frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \left[\cos^3\alpha + \cos\alpha\, \text{sen}^2\alpha - 1\right] =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \left[\cos\alpha \cdot \left(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right) - 1\right] = -\frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \left[\cos\alpha - 1\right] = \frac{2\pi}{3} R^3 \cdot \left[1 - \cos\alpha\right] \quad u^3$$

Otro método:

Lo que se genera es un sector esférico cuyo volumen se calcula muy fácilmente mediante una integral triple con su paso a esféricas.



$$V = \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_Q 1 \cdot \rho^2\, \text{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=R} \left[\int_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \rho^2\, \text{sen}\phi\, d\phi \right] d\rho \right] d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 1\, d\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho^2\, d\rho \cdot \int_{\phi=0}^{\phi=\alpha} \text{sen}\phi\, d\phi = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos\phi\right]_0^\alpha = \frac{2\pi}{3} R^3 \left(1 - \cos\alpha\right) \quad u^3$$