ARQUITECTURA: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Segundo Parcial **9 de Febrero de 2006** **Curso 2005/2006**

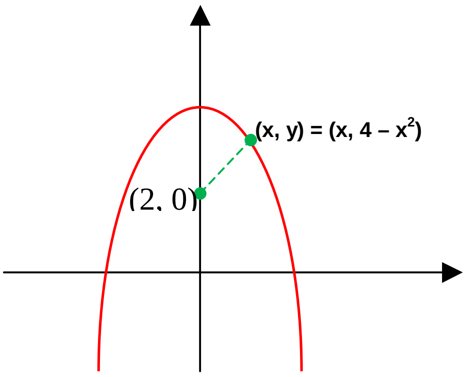
Duración: 2 horas

Apellidos y Nombre: **N.P. :**

Ejercicio 1. (2,5 puntos)

Halla los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que están más cercanos al punto (0, 2).

Un punto de la gráfica de la parábola es: $(x, 4 - x^2)$



Su distancia al punto (0, 2) es: $d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(4 - x^2 - 2\right)^2}$

Se puede, por sencillez, trabajar con $D = d^2$ en el convencimiento de que ambas funciones alcanzan sus extremos relativos en los mismos puntos, aunque los valores alcanzados en ellos sí que son distintos.

Se trata por lo tanto de hallar el mínimo absoluto de:

$$D = x^2 + \left(2 - x^2\right)^2 = x^4 - 3x^2 + 4 \ ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} D' = 4x^3 - 6x \\ D' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(2x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \\ 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Comparación de valores:

$$\left\{\begin{array}{l} D(+\infty) = +\infty \\ D(-\infty) = +\infty \\ D(0) = 4 \\ D\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{7}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

El menor valor es alcanzado en los puntos $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y es por ello que el mínimo absoluto de nuestra función ***d*** es alcanzado también en dichos puntos. El valor del mínimo es $\sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

<u>Ejercicio 2</u>. (2,5 puntos)

Halla los extremos relativos de: $f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 6y^2 - 12 \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2xy - y^2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12xy - 6y^2$$

La segunda ecuación del sistema: $y \cdot (2x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ y = 0 \\ 2)\ y = 2x \end{cases}$

1) en la primera ecuación del sistema: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

2) en la primera ecuación del sistema: $x^2 + 2 \cdot 4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{2}{3} \\ x_4 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Los puntos críticos de la función son: $(2, 0)$; $(-2, 0)$; $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

<u>Análisis</u>:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 12y = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x - 12y$$

$H(2, 0) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} > 0 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) > 0 \Rightarrow$ Se alcanza en dicho punto un mínimo relativo

$H(-2, 0) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -24 \end{vmatrix} > 0 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, 0) < 0 \Rightarrow$ Se alcanza en dicho punto un máximo relativo

$H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ Se alcanza un punto silla.

$H\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{vmatrix} -4 & -16 \\ -16 & 8 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow$ Se alcanza un punto silla.

<u>Ejercicio 3</u>. (2,5 puntos)

Sea la función $f(x, y) = \text{sen}(xy) + xy\, e^{x/y}$

a) **Calcula** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ **;** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ **;** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1)$ **;** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 1)$ **.**

b) **¿Es diferenciable en el punto (0, 1)? ¿Porqué?.**

c) **Calcula el valor de la derivada direccional en dicho punto según el vector** $\vec{h} = \vec{j}$ **.**

En primer lugar, debemos darnos cuenta de que el $\text{Dom}(f) = \Re^2 - \{ (x,y) / \ y \neq 0 \}$

a) Para los puntos del dominio se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy) \cdot y + y \cdot \left[e^{x/y} + x\, e^{x/y}\, \frac{1}{y} \right] = y \cdot \cos(xy) + e^{x/y} \cdot (y + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) \cdot x + x \cdot \left[e^{x/y} + y\, e^{x/y} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] = x \cdot \cos(xy) + e^{x/y} \cdot \left(x - \frac{x^2}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y \cdot (-\text{sen}(xy) \cdot y) + \left[e^{x/y}\, \frac{1}{y} \right] \cdot (y + x) + e^{x/y} \cdot 1 = -y^2 \cdot \text{sen}(xy) + e^{x/y} \cdot \left(2 + \frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \cos(xy) + y \cdot (-\text{sen}(xy) \cdot x) + \left[e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right] \cdot (y + x) + e^{x/y} \cdot 1 = \cos(xy) - x\,y \cdot \text{sen}(xy) + e^{x/y} \cdot \left(1 - \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \right)$$

$(0, 1) \in \text{Dom}(f) \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 2; \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,1) = 2$

b) Estudiaremos la continuidad de la función y de sus primeras derivadas en los puntos del dominio:

- $x\,y$, $y + x$, y, x son funciones continuas por ser polinomios
- $\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{x^2}{y}$ son continuas por ser funciones racionales cuyo denominador no se anula
- sen(xy), cos(xy), $e^{x/y}$ son continuas por ser composición de funciones continuas

Por lo tanto, $f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son funciones continuas en Dom(f) por ser suma y producto de funciones continuas, lo que es condición suficiente para concluir que:

f(x, y) es diferenciable en todo punto de Dom(f)

c) Puesto que f es diferenciable en (0, 1) existe el vector gradiente en dicho punto: $\overrightarrow{\nabla f(0,1)} = 2\,\vec{i}$ y las derivadas direccionales en dicho punto pueden calcularse mediante dicho vector:

$$D_{\vec{h}} f(0,1) = \overrightarrow{\nabla f(0,1)} \cdot \overrightarrow{h_u} = 2\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

<u>Ejercicio 4</u>. (2,5 puntos)

Sea f(x): $\Re \rightarrow \Re$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(x^2 - 3) & x \geq 2 \\ ax^2 + b & x < 2 \end{cases}$$

Halla los valores de "a" y "b" para que f(x) sea continua y derivable en todo los puntos.

Démonos cuenta que f(x) está definida en todo punto, ya que $x^2 - 3 > 0$ $\forall x \geq 2$ por lo que la función neperiano está perfectamente definida. Por consiguiente $Dom(f) = \Re$

<u>Continuidad</u>:

$x^2 - 3$, $ax^2 + b$ son funciones continuas por ser polinomios

$Ln(x^2 - 3)$ es continua por ser composición de funciones continuas

Por lo tanto f(x) es continua en todo punto $x \neq 2$

Veamos ahora en x = 2:

$f(2) = 1 + Ln(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left[ax^2 + b\right] = 4a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left[1 + Ln(x^2 - 3)\right] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

El límite existe, y es continua, en x = 2 si, y sólo si se verifica que ambos límites laterales son iguales: 4a + b = 1

f(x) es continua en $\Re$ si, y sólo si: 4a + b = 1

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3} & \forall x > 2 \\ f'(x) = 2ax & \forall x < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Por lo tanto f(x) es derivable en todo punto } x \neq 2$$

Veamos ahora en x = 2:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2ax = 4a = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x}{x^2 - 3} = 4 = f'(2^+) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

El límite existe, y es derivable, en x = 2 si, y sólo si se verifica que ambos límites laterales son iguales:4a = 4

f(x) es derivable en $\Re$ si, y sólo si: 4a + b = 1 y además a = 1

En conclusión f(x) es continua y derivable en todo punto si, y sólo si a = 1 y b = - 3.