Ejercicio 1. **(2,5 puntos)**

Calcula: $$\mathbf{I(x) = \int \frac{tg\,(2x+1)}{1+2\,tg^2\,(2x+1)}\,dx}$$

Primer método:

$$I(x) = \int \frac{tg\,(2x+1)}{1+2\,tg^2\,(2x+1)}\,dx = \int \frac{\dfrac{sen\,(2x+1)}{cos(2x+1)}}{1+2\cdot\dfrac{sen^2\,(2x+1)}{cos^2\,(2x+1)}}\,dx = \int \frac{\dfrac{sen\,(2x+1)}{cos(2x+1)}}{\dfrac{cos^2\,(2x+1)+2\cdot sen^2\,(2x+1)}{cos^2\,(2x+1)}}\,dx =$$

$$= \int \frac{sen\,(2x+1)\cdot cos(2x+1)}{cos^2\,(2x+1)+2\cdot sen^2\,(2x+1)}\,dx = \int \frac{sen\,(2x+1)\cdot cos(2x+1)}{1+sen^2\,(2x+1)}\,dx =$$

Esta integral resulta ser impar en seno, impar en coseno y par en seno y coseno. Es por ello que admite cualquiera de los cambios propios de las integrales trigonométricas.

Nos decidimos, por sencillez, por hacer el siguiente cambio:

Cambio: sen (2x+1) = t $\Rightarrow$ $2\cdot\cos(2x+1)\,dx = dt$

$$J(t) = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\left(\frac{dt}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\cdot dt = \frac{1}{4}\cdot Ln\left(1+t^2\right)+C$$

$$\Rightarrow\quad I(x) = \frac{1}{4}\cdot Ln\left[1+sen^2\,(2x+1)\right]+C$$

Segundo método:

Es una integral trigonométrica par en seno y coseno por venir expresada únicamente en función de la tangente.

Se resuelve con el cambio:

$$t = tg(2x+1) \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{1+t^2}$$

Haciendo este cambio en la integral y operando queda:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int \frac{t}{(1+2t^2)}\;\frac{dt}{1+t^2}$$

La integral resultante es racional y se resuelve por descomposición en fracciones simples:

$$J(t) = \frac{1}{2}\left[\int \frac{Mt+N}{1+2t^2}\,dt + \int \frac{At+B}{1+t^2}\,dt\right]$$

Cálculo de las constantes:

$$t = (Mt+N)(1+t^2)+(At+B)(1+2t^2)$$

$$\begin{array}{lll} 3^{o} & \Rightarrow & 0 = M+2A \\ 2^{o} & \Rightarrow & 0 = N+2B \\ 1^{o} & \Rightarrow & 1 = M+A \\ 0^{o} & \Rightarrow & 0 = N+B \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 0 \\ M = 2 \\ N = 0 \end{array}\right.$$

Con todo ello:

$$J(t)=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{1+2t^2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{-t}{1+t^2}dt=\frac{1}{4}\ln(1+2t^2)-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+2t^2}{1+t^2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left(2-\frac{1}{1+t^2}\right)$$

Y deshaciendo el cambio la solución final se puede escribir de las formas siguientes:

$$I(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+2tg^2(2x+1)}{1+tg^2(2x+1)}\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left(2-\frac{1}{1+tg^2(2x+1)}\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left[2-\cos^2(2x+1)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot Ln\left[1+sen^2(2x+1)\right]+C$$

Ejercicio 2. **(2,5 puntos)**

Calcula: $I(x) = \int \frac{14x^2 + 7x + 9}{\sqrt{2 + x - x^2}}\, dx$

La integral es irracional y se resuelve por el método alemán:

$$\int \frac{14x^2 + 7x + 9}{\sqrt{2 + x - x^2}}\, dx = (Ax + B)\sqrt{2 + x - x^2} + a_0 \int \frac{1}{\sqrt{2 + x - x^2}} dx$$

Derivando esta expresión, operando y resolviendo el sistema de 3 ecuaciones se calculan los 3 coeficientes:

$$\frac{14x^2 + 7x + 9}{\sqrt{2 + x - x^2}} = A\sqrt{2 + x - x^2} + (Ax + B)\frac{1 - 2x}{2\sqrt{2 + x - x^2}} + \frac{a_0}{\sqrt{2 + x - x^2}}$$

$$14x^2 + 7x + 9 = A \cdot \left(2 + x - x^2\right) + (Ax + B) \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + a_0$$

$$2º \Rightarrow \quad 14 = -A - A \Rightarrow \quad A = -7$$

$$1º \Rightarrow \quad 7 = A + \frac{A}{2} - B \Rightarrow \quad B = \frac{3A}{2} - 7 = \frac{-21}{2} - 7 = -\frac{35}{2}$$

$$0º \Rightarrow \quad 9 = 2A + \frac{B}{2} + a_0 \Rightarrow \quad a_0 = 9 - 2A - \frac{B}{2} = 9 + 14 + \frac{35}{4} = \frac{36 + 56 + 35}{4} = \frac{127}{4}$$

Calculando la integral $\int \frac{1}{\sqrt{2 + x - x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{2x - 1}{3}\right)$

Con todo ello, la solución final es:

$$\int \frac{14x^2 + 7x + 9}{\sqrt{2 + x - x^2}}\, dx = \left(-7x - \frac{35}{2}\right)\sqrt{2 + x - x^2} + \frac{127}{4}\text{arcsen}\left(\frac{2x - 1}{3}\right) + C$$

<u>Ejercicio 3</u>. (2 puntos)

Para cada una de las siguientes ecuaciones, reconoce el tipo de cónica que representa y realiza una esbozo de la misma:

a) $\mathbf{4y^2 - x^2 - 2x - 8y - 1 = 0}$

b) $\mathbf{2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0}$

a)

$$\left.\begin{array}{l} A = -1 \neq 0 \,;\, B = 4 \neq 0 \\ A \neq B \\ \text{signo(A)} \neq \text{signo(B)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Hipérbola}$$

Primer método:

$$-x^2 - 2x = -\left[x^2 + 2x\right] = -\left[(x+1)^2 - 1^2\right] = -(x+1)^2 + 1$$

$$4y^2 - 8y = 4 \cdot \left[y^2 - 2y\right] = 4 \cdot \left[(y-1)^2 - 1^2\right] = 4(y-1)^2 - 4$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$-(x+1)^2 + 1 + 4(y-1)^2 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow \quad -(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \Rightarrow \quad -\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

$$-\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1$$

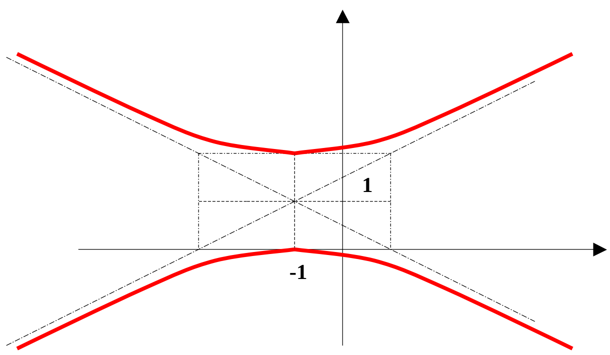
Centro: (-1, 1), semieje x: 2, semieje y: 1

Segundo método:

Ecuación reducida de la hipérbola: $-\dfrac{(x-a)^2}{m^2} + \dfrac{(y-b)^2}{n^2} = 1 \Rightarrow \quad -n^2 \cdot (x-a)^2 + m^2 \cdot (y-b)^2 - m^2n^2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} -n^2x^2 + m^2y^2 + 2an^2x - 2bm^2y - a^2n^2 + b^2m^2 - m^2n^2 = 0 \\ -x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n^2 = 1 \\ m^2 = 4 \\ 2an^2 = -2 \Rightarrow \quad a = -1 \\ -2bm^2 = -8 \Rightarrow \quad b = 1 \\ -a^2n^2 + b^2m^2 - m^2n^2 = -1 + 4 - 4 = -1 \quad \text{OK.} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \text{ igual que antes}$$



b) $\mathbf{2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0}$

$$\left.\begin{cases} A = 2 \neq 0,\ B = 2 \neq 0 \\ A = B \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad \text{Circunferencia}$$

Primer método:

$$2x^2 - x = 2\cdot\left[\ x^2 - \frac{1}{2}x\ \right] = 2\cdot\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$2y^2 + 3y = 2\cdot\left[\ y^2 + \frac{3}{2}y\ \right] = 2\cdot\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 1 = 0 \Rightarrow \quad 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \qquad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

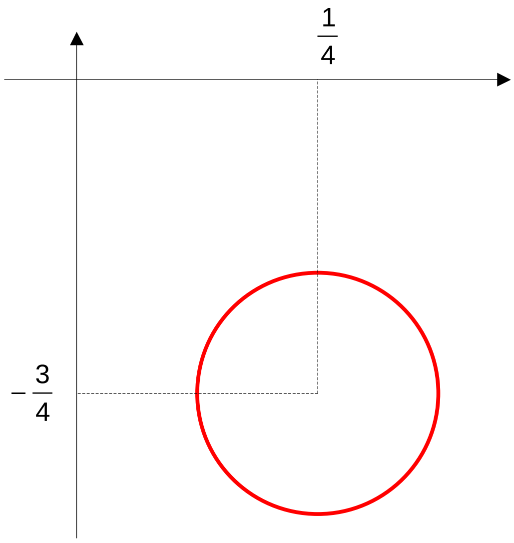
$$\textbf{Centro: } \left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right) \qquad \textbf{Radio: } \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Segundo método:

Ecuación reducida de la circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} -2a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} \\ -2b = \frac{3}{2} \Rightarrow \quad b = -\frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 - R^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad R^2 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \ \text{ igual que antes}$$



<u>Ejercicio 4</u>. (1 punto)

Resuelve: $\frac{5}{4} < \frac{9x+1}{6x+2} < \frac{13}{8}$

Primer método:

a. $\frac{5}{4} < \frac{9x+1}{6x+2} \Rightarrow 0 < \frac{9x+1}{6x+2} - \frac{5}{4} \Rightarrow 0 < \frac{36x+4-30x-10}{4\cdot(6x+2)} \Rightarrow 0 < \frac{6x-6}{8\cdot(3x+1)}$

$0 < \frac{3\cdot(x-1)}{4\cdot(3x+1)}$

Puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ 3x+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

	(-∞, -1/3)	(-1/3, 1)	(1, +∞)
x – 1	-	-	+
3x + 1	-	+	+
$\frac{3\cdot(x-1)}{4\cdot(3x+1)}$	+	-	+

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{4} < \frac{9x+1}{6x+2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

b. $\frac{9x+1}{6x+2} < \frac{13}{8} \Rightarrow \frac{9x+1}{6x+2} - \frac{13}{8} < 0 \Rightarrow \frac{72x+8-78x-26}{8\cdot(6x+2)} \Rightarrow \frac{-6x-18}{16\cdot(3x+1)} < 0$

$\frac{-6\cdot(x+3)}{16\cdot(3x+1)} < 0$

Puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} x+3=0 \\ 3x+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

	(-∞, -3)	(-3, -1/3)	(-1/3, +∞)
x + 3	-	+	+
3x + 1	-	-	+
$\frac{-6\cdot(x+3)}{16\cdot(3x+1)}$	-	+	-

$$\Rightarrow \quad \frac{9x+1}{6x+2} < \frac{13}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -3) \cup (-1/3, +\infty)$$

Puesto que se han de verificar ambas desigualdades simultáneamente, la solución de la inecuación es:

$$x \in \left[\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, -3) \cup (-1/3, +\infty)\right]$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Segundo método. Geométricamente:

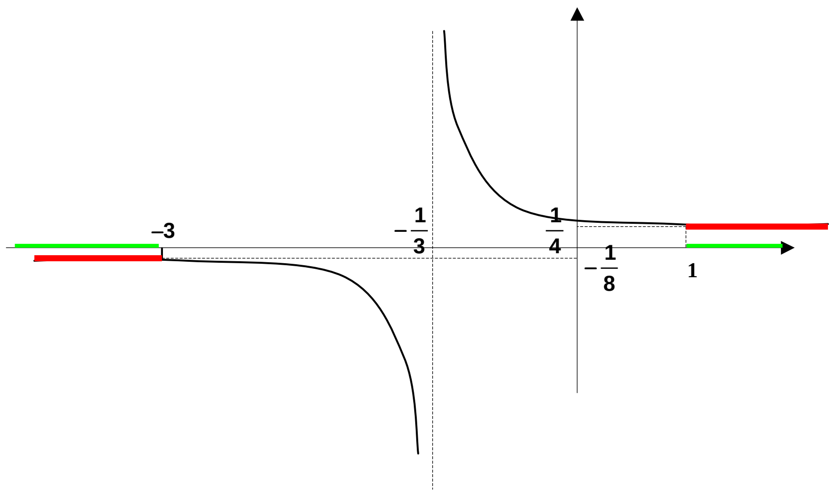
$$\begin{array}{l|l} 9x+1 & 6x+2 \\ \cline{2-2} -9x-3 & \frac{3}{2} \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{4}<\frac{3}{2}-\frac{2}{6x+2}<\frac{13}{8} \Rightarrow \quad \frac{5}{4}-\frac{3}{2}<\frac{3}{2}-\frac{2}{6x+2}-\frac{3}{2}<\frac{13}{8}-\frac{3}{2} \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}<-\frac{2}{6x+2}<\frac{1}{8} \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}<-\frac{1}{3x+1}<\frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{-\frac{1}{8}<\frac{1}{3x+1}<\frac{1}{4}}$$

1-. $-\frac{1}{8}=\frac{1}{3x+1} \Rightarrow \quad 3x+1=-8 \Rightarrow \quad 3x=-9 \Rightarrow \quad x=-3$

2-. $\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 3x+1=4 \Rightarrow \quad 3x=3 \Rightarrow \quad x=1$



$$\Rightarrow \quad \mathbf{-\frac{1}{8}<\frac{1}{3x+1}<\frac{1}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x \in (-\infty,-3) \cup (1,+\infty)}$$

Tercer método. Analíticamente:

Hipótesis: $6x+2>0 \Rightarrow \quad x>-\frac{1}{3}$

$$\frac{5}{4}<\frac{9x+1}{6x+2}<\frac{13}{8} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \frac{5}{4}<\frac{9x+1}{6x+2} \quad \Leftrightarrow & 30x+10<36x+4 \quad \Leftrightarrow & 6<6x \quad \Leftrightarrow & 1<x \\ \text{y} & \text{y} & \text{y} & \text{y} \\ \frac{9x+1}{6x+2}<\frac{13}{8} \quad \Leftrightarrow & 72x+8<78x+26 \quad \Leftrightarrow & -18<6x \quad \Leftrightarrow & -3<x \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad x>1$$

Como además se ha de cumplir la hipótesis:

$$\Leftrightarrow \quad (x>1) \cap \left(x>-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \quad x>1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1,+\infty)$$

Hipótesis: $6x+2<0 \Rightarrow \quad x<-\frac{1}{3}$

$$\frac{5}{4} < \frac{9x+1}{6x+2} < \frac{13}{8} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{5}{4} < \frac{9x+1}{6x+2} & \Leftrightarrow & 30x+10 > 36x+4 & \Leftrightarrow & 6 > 6x & \Leftrightarrow & 1 > x \\ y & & y & & y & & y \\ \frac{9x+1}{6x+2} < \frac{13}{8} & \Leftrightarrow & 72x+8 > 78x+26 & \Leftrightarrow & -18 > 6x & \Leftrightarrow & -3 > x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \quad -3 > x$$

Como además se ha de cumplir la hipótesis:

$$\left(x < -3 \right) \cap \left(x < -\frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \quad x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -3 \right)$$

Puesto que se ha de verificar una y sólo una de las hipótesis propuestas, las soluciones son:

$$x \in \left(-\infty, -3 \right) \cup \left(1, +\infty \right)$$

<u>Ejercicio 5</u>. (2 puntos)

1-. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **Resuelve la siguiente ecuación:** $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

2-. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Resuelve la siguiente ecuación:** $X - B^2 = A \cdot B$

1-.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{23} \cdot M_{23} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{|A|} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2-.

$$X - B^2 = A \cdot B \Rightarrow \qquad X = A \cdot B + B^2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$