ARQUITECTURA: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Tercer Parcial **6 de Abril de 2005** **Curso 2004/2005**
Duración: 2 HORAS

Apellidos y Nombre: **N.P. :**

Ejercicio 1. **(2 puntos)**

Se define la siguiente función integral: $F(x)=\int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2}\frac{x}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$. **Calcula:** $F'(1)$

$$F(x)=x\int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$$,La función es el producto de x por una función integral.

Aplicando la regla de derivación del producto y en virtud del teorema fundamental del cálculo integral:

$$F'(x)=\int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt+x\left[\frac{2x}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^3}}-\frac{\frac{x^{-2/3}}{3}}{\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}}\right]$$

Operando:

$$F'(x)=\int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt+\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{1+x}}$$

Haciendo x = 1, para calcular el valor pedido:

$$F'(1)=\int_{1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt+\frac{2}{\sqrt{1+1}}-\frac{\sqrt[3]{1}}{3\sqrt{1+1}}=0+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$F'(1)=\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

Ejercicio 2. **(3 puntos)**

Sea la región plana encerrada por las curvas: $a\,y = x^2$; $a\,x = y^2$; $x + y = 6a$, en el intervalo: $[a\,,4a]$. Determina el valor del parámetro: a, con: $a \in \Re \,/\, a > 0$, para que el volumen de revolución engendrado al girar dicha región en torno al eje OX valga exactamente: $\frac{521\pi}{30}\left[u^3\right]$.

Para identificar la región plana, consideramos las curvas dadas y sus puntos de intersección:

$a\,y = x^2 \rightarrow y = \frac{x^2}{a}$ Es una parábola abierta hacia arriba con vértice en el origen.

$a\,x = y^2 \rightarrow x = \frac{y^2}{a}$ Es una parábola abierta hacia la derecha con vértice en el origen.

$x + y = 6a \rightarrow y = -x + 6a$ Es una recta que pasa por los puntos (0,6a) y (6a, 0).

Puntos de intersección de las parábolas:

$$\left.\begin{cases} a\,y = x^2 \\ a\,x = y^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad a\,y = \left(\frac{y^2}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a^3\,y = y^4 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow & x = 0 \\ y = a \Rightarrow & x = a \end{cases}$$

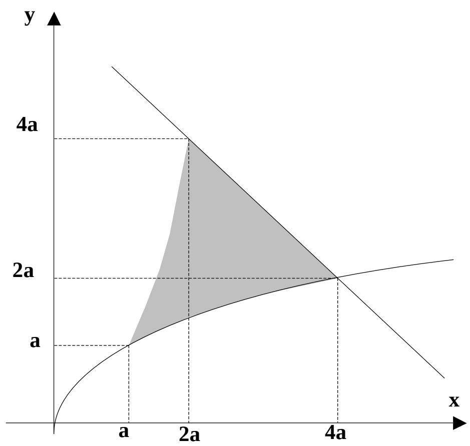
Puntos de intersección entre la recta y la parábola: $a\,y = x^2$ **:**

$$\left.\begin{cases} a\,y = x^2 \\ x + y = 6a \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad x + \frac{x^2}{a} = 6a \Rightarrow \quad x^2 + ax - 6a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\,a \Rightarrow & y = 4a \\ x = -3a \notin [a,\, 4a] \end{cases}$$

Puntos de intersección entre la recta y la parábola: $a\,x = y^2$**:**

$$\left.\begin{cases} a\,x = y^2 \\ x + y = 6a \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad \frac{y^2}{a} + y = 6a \Rightarrow \quad y^2 + ay - 6a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2\,a \Rightarrow & x = 4a \\ y = -3a \Rightarrow & x = 9a \notin [a,4a] \end{cases}$$

El recinto plano es el siguiente:



Si se calcula proyectando sobre el eje OX debemos integrar por discos:

$$V = \pi \int_a^{2a} \left[\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 - \left(\sqrt{ax}\right)^2 \right] dx + \pi \int_{2a}^{4a} \left[(-x + 6a)^2 - \left(\sqrt{ax}\right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_a^{2a} \left[\frac{x^4}{a^2} - ax \right] dx + \pi \int_{2a}^{4a} \left[(-x + 6a)^2 - ax \right] dx = \pi \left[\frac{x^5}{5a^2} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^{2a} + \pi \left[\frac{-(-x + 6a)^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_{2a}^{4a}$$

$$V = \pi \left[\frac{32a^3}{5} - 2a^3 - \frac{a^3}{5} + \frac{a^3}{2} \right] + \pi \left[\frac{-8a^3}{3} - 8a^3 + \frac{64a^3}{3} + 2a^3 \right] = \frac{521}{30} \pi\, a^3$$

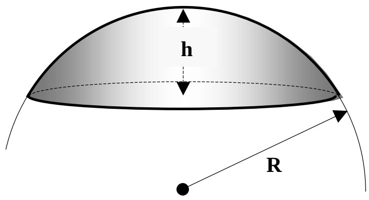
Si se calcula proyectando sobre el eje OY debemos integrar por tubos:

$$V = 2\pi \cdot \int_{a}^{2a} \left[y\left(\frac{y^2}{a} - \sqrt{ay}\right)\right] dy + 2\pi \cdot \int_{2a}^{4a} \left[y\left(-y + 6a - \sqrt{ay}\right)\right] dy$$

$$V = 2\pi \cdot \left[\frac{y^4}{4a} - \frac{2}{5}\sqrt{a}\, y^{5/2} \right]_{a}^{2a} + 2\pi \cdot \left[\frac{-y^3}{3} + 3a\, y^2 - \frac{2}{5}\sqrt{a}\, y^{5/2} \right]_{2a}^{4a} = \frac{521}{30}\pi\, a^3$$

En cualquier caso: $V = \frac{521}{30}\pi\, a^3$, y para que $V = \frac{521\,\pi}{30}\left[u^3\right]$ debe ser: $a = 1$

<u>Ejercicio 3</u>. **(2,5 puntos)**

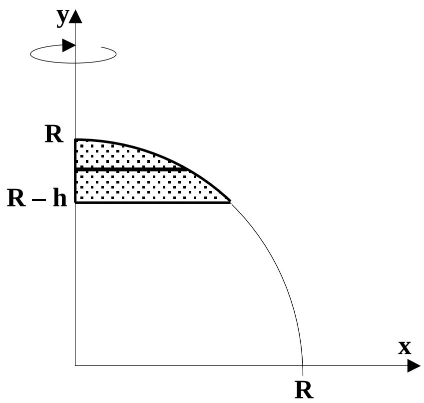


Calcula el volumen de un casquete esférico de radio R y altura h. Ver figura adjunta.

Es un sólido de revolución.

Elegimos la circunferencia centrada en el origen de coordenadas, por lo que su ecuación es: $x^2 + y^2 = R^2$.

En dicha situación el recinto generador del casquete es el de la siguiente figura:



Tomamos como eje de referencia el OY, ya que tenemos todos los datos necesarios.

El intervalo de trabajo es [R – h , R].

Las funciones de “y” que interviene en el cálculo son:

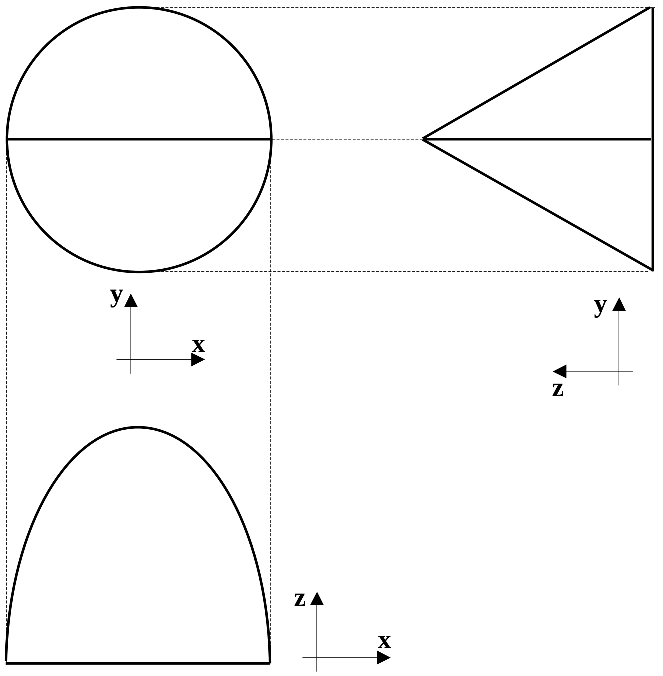
$$x = \sqrt{R^2 - y^2}\ ; \quad x = 0$$

La franja horizontal correspondiente a un punto cualquiera del intervalo de trabajo, genera al girar un disco. Por lo tanto:

$$V = \int_{R-h}^{R} \pi \cdot \left[\left(\sqrt{R^2 - y^2} \right)^2 - (0)^2 \right] dy = \pi \cdot \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - y^2 \right) dy = \pi \cdot \left[R^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{R-h}^{R} =$$

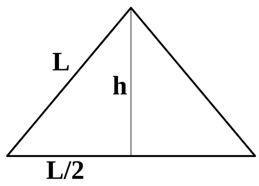
$$= \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 (R-h) - \frac{(R-h)^3}{3} \right) \right] = \ldots = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) u^3$$

Ejercicio 4. **(2,5 puntos)**



Calcula el volumen del sólido cuya base es un círculo de radio R y cuyas secciones perpendiculares al eje OX son triángulos equiláteros.

En la figura adjunta están representados la planta y los alzados.

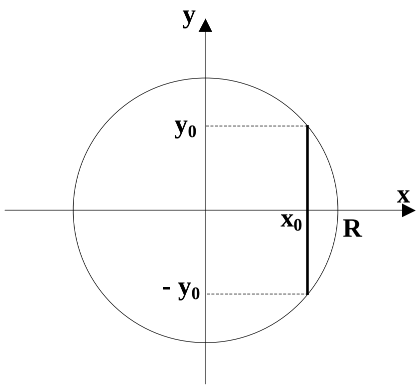


En un triángulo equilátero se tiene que:

$$h=\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

El circulo base lo centramos en el origen de coordenadas, por sencillez. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia correspondiente es: $x^2+y^2=R^2$.

Si para un punto cualquiera x_0, trazamos el segmento perpendicular al eje OX inscrito a la circunferencia, dicho segmento es la base del correspondiente triángulo equilátero, que forma la sección trazada para dicho punto. Tal y como se aprecia en la figura, la longitud de dicho segmento, o lo que es lo mismo, la longitud del lado del triángulo es igual a: $2y_0$. Puesto que (x_0, y_0) es un punto de la circunferencia se ha de verificar que: $x_0^2+y_0^2=R^2$.



Es decir que: $y_0=\sqrt{R^2-x_0^2} \Rightarrow \quad L=2\cdot\sqrt{R^2-x_0^2}$.

En general, para cualquier punto $x\in[0,R]$ se tiene que el lado de la sección triangular correspondiente mide: $L=2\cdot\sqrt{R^2-x^2}$ por lo que el área de dicha sección es igual a:

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot L\cdot h=\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot L^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\left(R^2-x^2\right)=\sqrt{3}\cdot\left(R^2-x^2\right)$$

Por ello, el volumen del sólido es:

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}\cdot(R^2-x^2)\,dx=2\cdot\sqrt{3}\int_{0}^{R}(R^2-x^2)\,dx=2\sqrt{3}\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\ldots=\frac{4R^3}{\sqrt{3}}\,u^3$$