Calcula: $\mathbf{I\,(x) = \int \frac{3x^2+1}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}\,dx}$

Como el grado del numerador es superior o igual a dos, el método alemán nos resuelve el problema.

$$\int \frac{3x^2+1}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}\,dx = (Ax+B)\cdot\sqrt{-2x^2+4x+1} + \int \frac{C}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}\,dx =$$

Derivando se tiene:

$$\frac{3x^2+1}{\sqrt{-2x^2+4x+1}} = A\cdot\sqrt{-2x^2+4x+1} + (Ax+B)\cdot\frac{-4x+4}{2\sqrt{-2x^2+4x+1}} + \frac{C}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}$$

$$3x^2+1 = A\cdot\left(-2x^2+4x+1\right) + (Ax+B)\cdot(-2x+2) + C$$

$$A = -\frac{3}{4};\quad B = -\frac{9}{4};\quad C = \frac{25}{4}$$

$$\int \frac{\frac{25}{4}}{\sqrt{-2x^2+4x+1}}\,dx = \frac{25}{4}\int \frac{1}{\sqrt{3-\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2}}\,dx = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc sen}\left[\frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad I(x) = -\frac{3x+9}{4}\cdot\sqrt{-2x^2+4x+1} + \frac{25}{4\cdot\sqrt{2}}\,\text{arc sen}\left[\frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right] + C$$

Calcula: $\quad \mathbf{I(x) = \int \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{sen\,x\,\cos x\,(1+\cos x)}\,dx}$

La función subintegral es claramente una función impar en seno.

Cambio: cos x = t dx = -sen t dt

$$I(x) = \int \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{sen\,x\,\cos x\,(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) sen\,x}{sen^2 x\,\cos x\,(1+\cos x)}\,dx$$

$$J(t) = \int \frac{\left(t^2 - (1-t^2)\right)(-dt)}{(1-t^2)\,t\,(1+t)} = \int \frac{-\left(2t^2-1\right)}{(1-t^2)\,t\,(1+t)}\,dt = \int \frac{1-2t^2}{(1-t)\,t\,(1+t)^2}\,dt$$

Integral racional para resolver mediante descomposición en fracciones simples

$$\frac{1-2t^2}{(1-t)\,t\,(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C_1}{1+t} + \frac{C_2}{(1+t)^2}$$

$$1-2t^2 = A(1-t)(1+t)^2 + B\,t(1+t)^2 + C_1\,t(1-t)(1+t) + C_2\,t(1-t)$$

$$A = 1; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad C_1 = -\frac{5}{4}; \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

$$J(t) = \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{-\frac{1}{4}}{1-t}\,dt + \int \frac{-\frac{5}{4}}{1+t}\,dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{(1+t)^2}\,dt = \ln|t| + \frac{1}{4}\ln|1-t| - \frac{5}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + C$$

Se deshace el cambio: t = cos x

Para cada una de las siguientes ecuaciones, reconoce el tipo de cónica que representa y realiza una esbozo de la misma:

a) $\mathbf{4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0}$

b) $\mathbf{2x^2 - x + y + 1 = 0}$

a) $A \neq 0 \quad B \neq 0; \quad A \neq B;$ signo de A = signo de B $\Rightarrow$ **Elipse**

a.1) $4x^2 - 8x = 4\left[x^2 - 2x\right] = 4\left[(x-1)^2 - 1^2\right] = 4(x-1)^2 - 4$

$$9y^2 + 36y = 9\left[y^2 + 4y\right] = 9\left[(y+2)^2 - 2^2\right] = 9(y+2)^2 - 36$$

a.2) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = m(x-a)^2 + n(y-b)^2 + p$

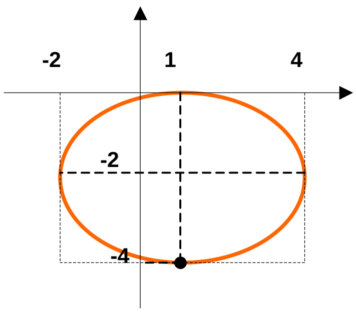
$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = mx^2 - 2amx + a^2m + ny^2 - 2nby + nb^2 + p$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{\circ}\text{ en } x \Rightarrow 4 = m \Rightarrow m = 4 \\ 1^{\circ}\text{ en } x \Rightarrow -8 = -2am \Rightarrow a = 1 \\ 2^{\circ}\text{ en } y \Rightarrow 9 = n \Rightarrow n = 9 \\ 1^{\circ}\text{ en } y \Rightarrow 36 = -2nb \Rightarrow b = -2 \\ 0^{\circ} \Rightarrow 4 = a^2m + b^2n + p \Rightarrow p = -36 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 36 = 0$$

$\Rightarrow \quad 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$ dividiendo por 36

$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$



$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

centro: (1, -2) ; semieje x: 3 ; semieje y: 2

b) $A \neq 0, \quad B = 0 \Rightarrow$ **Parábola**

$y = -2x^2 + x - 1.$

Puesto que el coeficiente cuadrático es negativo$\Rightarrow$ **Parábola abierta hacia abajo**

b.1) $-2x^2 + x - 1 = -m(x-a)^2 + b$

$$-2x^2 + x - 1 = -mx^2 + 2am - a^2m + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{\circ} \Rightarrow -2 = -m \Rightarrow m = 2 \\ 1^{\circ} \Rightarrow 1 = 2am \Rightarrow a = \dfrac{1}{4} \\ 0^{\circ} \Rightarrow -1 = -a^2m + b \Rightarrow b = -\dfrac{7}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2\left[x - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Vértice} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$$

b.2) $\left.\begin{cases} y' = -4x+1 \\ y' = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \; -4x+1=0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{1}{4}$

$$y_0 = -2x_0^2 + x_0 - 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Vértice}: \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$$

b.3)

$$y = -2x^2 + x - 1 \;\Rightarrow\; y = -2\cdot\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 1 \;\Rightarrow\; y = -2\cdot\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] - 1 \;\Rightarrow\; y = -2\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} - 1$$

$$y = -2\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} \;\Rightarrow\; y + \frac{7}{8} = -2\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

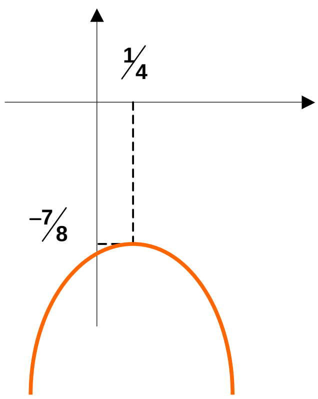
$$\Rightarrow \quad \text{Vértice}: \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$$

Intersección con el eje X :

$\left.\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \; -2x^2 + x - 1 = 0 \;\Rightarrow$ Carece de soluciones reales $\Rightarrow$ No corta al eje X

Intersección con el eje Y :

$\left.\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \; y = -1 \;\Rightarrow$ Corta al eje Y en el punto (0, -1)



Resuelve: $\mathbf{-1 < \dfrac{3x+1}{2x-1} < 2}$

Para facilitar la resolución dividimos ambos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} 3x + 1 & 2x - 1 \\ \cline{2-2} -3x + \dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} \\ \cline{1-1} \dfrac{5}{2} & \end{array}$$

$$\frac{3x+1}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-1} < 2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} < \frac{\frac{5}{2}}{2x-1} < \frac{1}{2}$$

$-1 < \dfrac{1}{2x-1} < \dfrac{1}{5}$ Estamos ya en condiciones de representarla gráficamente. La gráfica de $\dfrac{1}{2x-1}$ es una hipérbola equilátera con la asíntota vertical en el valor de x que anula al denominador: $x = \dfrac{1}{2}$. En cuanto a la asíntota horizontal, se tiene: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x-1} = 0$. Es decir, la recta y = 0

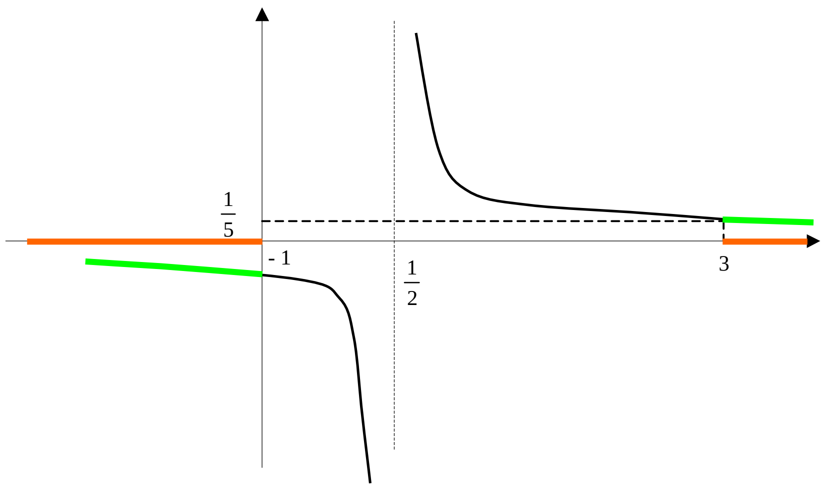
Resolvemos las identidades con los valores límites de la inecuación:

a) $\dfrac{1}{2x-1} = -1 \Rightarrow \quad x = 0$

b) $\dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \; x = 3$

Los puntos de la gráfica con valores comprendidos entre –1 y $\dfrac{1}{5}$ están marcados en grueso, así como, los valores de x correspondientes. Resulta por lo tanto que la solución es:

$$-1 < \frac{3x+1}{2x-1} < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$$



Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de "a" para los que la matriz A^{-1} no existe.

b) Halla A^{-1} para a = 2 si es que existe.

a) Una matriz es invertible si y sólo si, su determinante asociado no es nulo

$$|A| = (0+1+0) - (0+a^2+0) = 1 - a^2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

$\Rightarrow \quad A^{-1}$ no existe si, y sólo si, $a = \pm 1$

b) Puesto que a = 2, sí que existe A^{-1}

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(A^t\right)^* = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ -1 & 1-a^2 & a \end{pmatrix}$$

Para a = 2 se tiene:

$$\left(A^t\right)^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como por el apartado anterior se tiene que: $|A| = -3$, resulta que:

$$A^{-1} = \frac{\left(A^t\right)^*}{|A|} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$