ARQUITECTURA: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Segundo Cuatrimestre 16 de Junio de 2005 Curso 2004/2005
Duración: 2 HORAS

Apellidos y Nombre: **N.P. :**

Ejercicio 1. (2 puntos)

Se define la siguiente función integral: $F(x) = \int_2^{\sqrt[3]{x}} \frac{2t - 3F'(t^3)}{x} dt$ **. Calcula** $F'(8)$

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_2^{\sqrt[3]{x}} \left(2t - 3F'(t^3)\right) dt$$, la función es el producto de 1/x por una integral.

Derivando por la regla de derivación del producto y en virtud del teorema fundamental del cálculo integral:

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\int_2^{\sqrt[3]{x}} \left(2t - 3F'(t^3)\right) dt + \frac{1}{x}\left[2\sqrt[3]{x} - 3F'(x)\right]\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

Haciendo x = 8, para calcular el valor pedido:

$$F'(8) = \left(-\frac{1}{8^2}\right)\int_2^{2} \left(2t - 3F'(t^3)\right) dt + \frac{1}{8}\left[2\sqrt[3]{8} - 3F'(8)\right]\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\right)$$

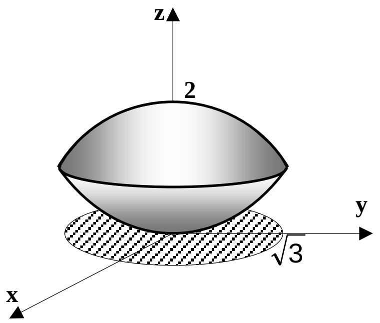
Operando y considerando que $8 = 2^3$

$$F'(8) = 0 + \frac{1}{8}\left[4 - 3F'(8)\right]\cdot\frac{1}{12} \Rightarrow F'(8) = \frac{1}{24} - \frac{F'(8)}{32} \Rightarrow \frac{33}{32}F'(8) = \frac{1}{24} \Rightarrow 33F'(8) = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

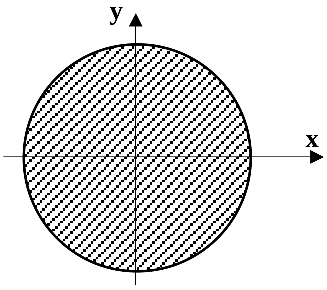
$$F'(8) = \frac{4}{99}$$

Ejercicio 2. **(2,5 puntos)**

Calcula el volumen del sólido Q: $\left\{ \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ ; \ x^2 + y^2 \le 3z} \right\}$**.**



El sólido Q: $\left\{ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \ ; \ z \ge \dfrac{x^2+y^2}{3} \right\}$ está limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (con centro en el origen y radio 2) e inferiormente por el paraboloide $z = \dfrac{x^2+y^2}{3}$ (que tiene eje de simetría el OZ, vértice en el origen, sección circular y está hacia arriba).



La proyección del sólido sobre el plano XY es una circunferencia centrada en el origen y con radio: $\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} 3z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 - z^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad 3z = 4 - z^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -4 \ \text{Imposible} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3$$

Se puede resolver por integración múltiple o por giro alrededor de un eje.

- Integral doble: siendo el recinto de integración R la circunferencia anterior y trabajando en polares.

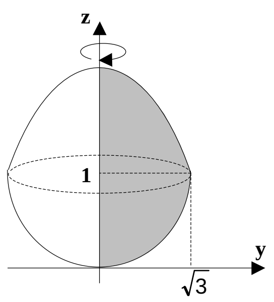
$$V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R \left[\sqrt{4 - \left(x^2+y^2\right)} - \frac{x^2+y^2}{3} \right] dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3} \right] \rho \ d\rho \ d\theta$$

$$V = 2\pi \left[\frac{-\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^4}{12} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{19\pi}{6}$$

- Integral triple: trabajando en cilíndricas.

$$V = \iiint_Q dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \ dzd\rho \ d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3} \right] \rho \ d\rho \ d\theta = \frac{19\pi}{6}$$

- Por giro alrededor del eje OZ:



$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y \left[\sqrt{4-y^2} - \frac{y^2}{3} \right] dy = 2\pi \left[\frac{-\left(4-y^2\right)^{3/2}}{3} - \frac{y^4}{12} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{19\pi}{6}$$

O también:

$$V = \pi \left[\int_0^1 \left(\sqrt{3z}\right)^2 dz + \int_1^2 \left(\sqrt{4-z^2} \right)^2 dz \right] = \frac{19\pi}{6}$$

Ejercicio 3. **(3 puntos)**

Dadas la curva *C*: $x^2+y^2=4^2$ **y las fuerzas:** $\vec{F}_1(x,y)=y\,e^{xy}\,\vec{i}+x\,e^{xy}\,\vec{j}$; $\vec{F}_2(x,y)=x^2\,\vec{i}+\left(x-\frac{y^2}{x}\right)\vec{j}$

a) Calcula el trabajo realizado por $\vec{F}_1$ para mover una partícula a lo largo de la curva *C* desde el punto (4,0) hasta el punto (0, 4).

b) Calcula $\oint_C \vec{F}_2 d\vec{r}$

a) La fuerza $\vec{F}_1(x,y)=y\,e^{xy}\,\vec{i}+x\,e^{xy}\,\vec{j}$ es conservativa ya que $\mathrm{rot}\vec{F}=0$

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}*\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ye^{xy} & xe^{xy} & 0\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}\right)\cdot\vec{k}-\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xy}\right)\cdot\vec{k}=\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)\cdot\vec{k}-\left(e^{xy}+yxe^{xy}\right)\cdot\vec{k}=0$$

Por tanto, al ser la fuerza conservativa, el trabajo pedido es independiente del camino y sólo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria, que en este caso son (4,0) y (0,4) respectivamente. Se podrá calcular dicho trabajo:

1. Usando el teorema fundamental de integrales curvilíneas mediante la diferencia de potencial entre los puntos final e inicial.
2. Usando cualquier camino que una los puntos inicial y final de la trayectoria, y resolviendo la integral curvilínea.
3. Usando el camino dado y resolviendo la integral curvilínea.

1-. Primer método:

Hay que calcular la función potencial

1.1-.

$$\phi(x,y)=\int_a^x M(x,y)\,dx+\int_b^y N(a,y)\,dy=\int_a^x y\,e^{xy}\,dx+\int_b^y a\,e^{ay}\,dy=\left[e^{xy}\right]_{x=a}^{x=x}+\left[e^{ay}\right]_{y=b}^{y=y}=e^{xy}-e^{ay}+e^{ay}-e^{ab}$$

$$\phi(x,y)=e^{xy}+K$$

1.2-.

De acuerdo con las propiedades de la función potencial se tiene:

$$\left.\begin{cases}\frac{\partial\phi}{\partial x}=y\,e^{xy}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=x\,e^{xy}\end{cases}\right\}\to\left\{\ \right\}$$

Integrando la primera de las ecuaciones:

$$\phi(x,y)=e^{xy}+C(y)$$

Derivando la expresión obtenida respecto de "y" e identificándola con la segunda ecuación del sistema:

$$x\,e^{xy}+\frac{dC}{dy}=x\,e^{xy}\quad\Rightarrow\quad\frac{dC}{dy}=0\quad\Rightarrow\quad C(y)=k$$

Por lo que la función potencial es:

$$\phi(x,y)=e^{xy}+k$$

El trabajo pedido es: $W=\int_C \vec{F}d\vec{r}=\phi(0,4)-\phi(4,0)=(1+k)-(1+k)=0$

2-. Segundo método:

Hay que considerar un camino cualquiera que una el punto final y el inicial de la curva C: (4,0) y (0,4)

Parece obvio que lo más sencillo es tomar la recta que une esos puntos.

Parametrizando dicha recta y resolviendo la integral:

$$\left\{\begin{array}{c} x = 4-4t \\ y = 4t \\ 0 \le t \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} dx = -4dt \\ dy = 4dt \end{array}\right\}$$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C y\, e^{xy}\, dx + x\, e^{xy}\, dy = \int_0^1 (16-32t) e^{16t-16t^2}\, dt = \left[e^{16t-16t^2} \right]_0^1 = 0$$

3-. Tercer método:

Se parametriza la curva dada y se resuelven las integrales que resultan:

$$C: \left\{\begin{array}{l} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} dx = -4\operatorname{sen} t\, dt \\ dy = 4\cos t\, dt \end{array}\right\}$$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t\right) \cdot e^{16\operatorname{sen} t \cos t}\, dt = \left[e^{16\operatorname{sen} t\cos t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-1=0$$

b) La fuerza $\vec{F}_2(x,y) = x^2\,\vec{i} + \left(x - \frac{y^2}{x}\right)\vec{j}$ no es conservativa porque $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} * \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & x - \frac{y^2}{x} & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} - 0\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{y^2}{x}\right)\cdot\vec{k} - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right)\cdot\vec{k} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\cdot\vec{k} - 0\cdot\vec{k} \neq 0$$

Para hacer $\oint_C \vec{F}_2 d\vec{r}$ hay que parametrizar la curva dada y resolver la integral:

$$C: \left\{\begin{array}{l} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} dx = -4\operatorname{sen} t\, dt \\ dy = 4\cos t\, dt \end{array}\right\}$$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -4^3 \cos^2 t\ \operatorname{sen} t\, dt + \int_0^{2\pi} \left(16\cos^2 t - 16\operatorname{sen}^2 t\right) dt = \left[\frac{4^3\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{16\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

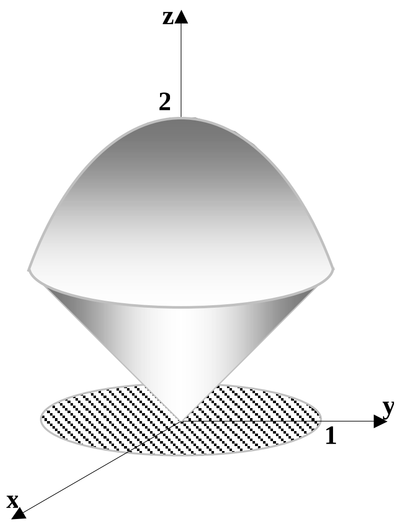
También se puede resolver usando el teorema de Green, $\oint_C \vec{F}_2 d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$

Considerando que: $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{y^2}{x}\right) = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = 0$ y que el recinto de integración es el interior de la circunferencia dada: $x^2 + y^2 \le 16$ es conveniente el paso a polares para resolver la integral doble:

$$\oint_C \vec{F}_2 d\vec{r} = \iint_R \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\rho\, d\rho\ d\theta = \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_0^4 (\operatorname{tg}\theta)_0^{2\pi} = 0$$

Ejercicio 4. **(2,5 puntos)**

Calcula las coordenadas del centro de masas del sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = 2-(x^2+y^2)$ e inferiormente por la hoja superior del cono: $z^2 = x^2+y^2$, cuya densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje Z.



El sólido Q es: $\{z \le 2-x^2-y^2\,;\, z^2 \ge x^2+y^2\}$ y está limitado superiormente por el paraboloide $z = 2-x^2-y^2$ (que tiene eje de simetría el OZ, vértice en (0,0,2), sección circular y está hacia abajo) e inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ (que tiene eje de simetría el OZ, vértice en (0,0,0), sección circular y está hacia arriba).

La proyección del sólido sobre el plano XY es una circunferencia centrada en el origen y con radio unidad:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2-x^2-y^2 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow 1 = x^2+y^2$$

Al tener simetría respecto al eje Z, las coordenadas x e y del centro de masas son nulas:

$x_{CM} = \dfrac{M_{YZ}}{m} = 0$ debido a que $M_{YZ} = 0$ ya que hay simetría respecto al plano YZ y la función del integrando en M_{YZ} es impar en x.

$y_{CM} = \dfrac{M_{XZ}}{m} = 0$ debido a que $M_{XZ} = 0$ ya que hay simetría respecto al plano XZ y la función del integrando en M_{XZ} es impar en y.

Como: $\rho(x,y) = K\sqrt{x^2+y^2}$, la expresión de la coordenada z del centro de masas es:

$$Z_{CM} = \frac{M_{XY}}{m} = \frac{1}{m}\iiint_Q z\,\rho\ d\rho\ d\theta \qquad m = \iiint_Q \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

Para resolver las dos integrales, dada la forma del sólido Q y la expresión de la función que hay que integrar, lo más indicado es realizar el cálculo pasando a coordenadas cilíndricas:

$$m = \iiint_Q \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = K\cdot\iiint_Q \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\ dy\ dz = K\cdot\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_\rho^{2-\rho^2}\rho^2\ dz\right)d\rho\right]d\theta$$

$$m = 2K\pi\cdot\int_0^1\left(\rho^2\left(2-\rho^2-\rho\right)\right)d\rho = 2K\pi\cdot\left(\frac{2\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}-\frac{\rho^4}{4}\right)_0^1 = \frac{13K\pi}{30}$$

$$M_{XY} = \iiint_Q z\cdot\rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = K\cdot\iiint_Q\left(z\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\ dy\ dz = K\cdot\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_\rho^{2-\rho^2} z\,\rho^2\ dz\right)d\rho\right]d\theta$$

$$M_{XY} = 2K\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{\rho^2}{2}\left(\left(2-\rho^2\right)^2-\rho^2\right)\right)d\rho = K\pi\cdot\left(\frac{\rho^7}{7}-\rho^5+\frac{4\rho^3}{3}\right)_0^1 = \frac{10K\pi}{21}$$

$$Z_{CM} = \frac{M_{XY}}{m} = \frac{\frac{10K\pi}{21}}{\frac{13K\pi}{30}} = \frac{100}{91}$$

Luego las coordenadas del centro de masas son (0, 0, 1.09)